

Τράπεζα Θεμάτων

Μαθηματικά της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
Β Λυκείου

Νικόλαος Τόμης

ΔΙΑΠΟΛ 2024-25

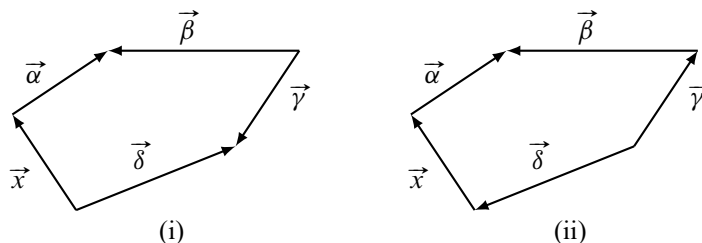
Περιεχόμενα

1	Διανύσματα	2
1.2	Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων	2
1.3	Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα	4
1.4	Συντεταγμένες στο επίπεδο	6
1.5	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	11
2	Η ευθεία στο επίπεδο	18
2.1	Εξίσωση ευθείας	18
2.2	Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας	22
2.3	Εμβαδόν τριγώνου	24
3	Κωνικές τομές	28
3.1	Ο κύκλος	28
3.2	Η παραβολή	34
3.3	Η έλλειψη	36
3.4	Η υπερβολή	37
A	Το πρώτο θέμα	38

1 Διανύσματα

1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

1. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ στα παρακάτω σχήματα συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

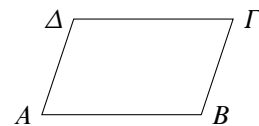


2. Να γράψετε τα παρακάτω διανύσματα ως ένα διάνυσμα:

- (α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$,
- (β) $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$,
- (γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$,
- (δ) $\overrightarrow{N\Pi} - \overrightarrow{P\Pi} - \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{P\Sigma} - \overrightarrow{T\Sigma}$.

3. Αν $AB\Gamma\Delta$ το παραλληλόγραμμο του σχήματος, να βρείτε:

- (α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$,
- (β) $\overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$,
- (γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$,
- (δ) $\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma}$.



4. Να δείξετε ότι:

- (α) $\overrightarrow{\Gamma E} - \overrightarrow{\Delta Z} - \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$,
- (β) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}$,
- (γ) $\overrightarrow{K\Lambda} - \overrightarrow{\Pi N} = \overrightarrow{M\Lambda} - \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{K\Pi}$.

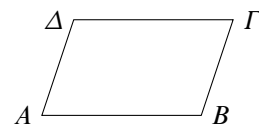
5. Αν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{\Delta E}$, να δείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

6. Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{\Gamma\Lambda}$, να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ ταυτίζονται.

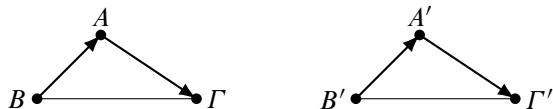
7. Αν $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{Z\Gamma} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{ZE}$, να δείξετε ότι το B είναι μέσο του $A\Gamma$.

8. Έστω $AB\Gamma\Delta$ το παραλληλόγραμμο του σχήματος. Να προσδιορίσετε το M αν ισχύει ότι

$$\overrightarrow{\Gamma M} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{AM}.$$



9 (2-22055). Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.



(α) Να εξηγήσετε γιατί:

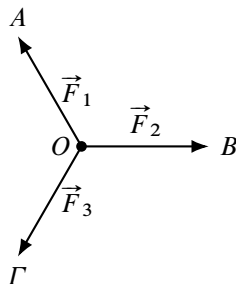
- (i) το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και
- (ii) το μήκος της πλευράς AG είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$.

(β) (i) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$.

- (ii) Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$.

(γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων; «Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10 (4-22068). Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° , έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.



(α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας;

(β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι αντίθετα.

(γ) Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), τότε να αποδείξετε ότι:

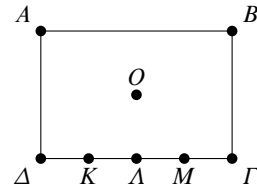
- (i) $\widehat{A\hat{O}\Delta} = \widehat{B\hat{O}\Delta} = 60^\circ$.

- (ii) $\widehat{O\hat{\Delta}B} = 60^\circ$.

(δ) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

1 (2-22042). Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O . Τα σημεία K, Λ, M χωρίζουν την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε τέσσερα ίσα τμήματα. Αν $\overrightarrow{\Delta K} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta \Lambda} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (α) $\overrightarrow{\Delta \Gamma}$, (β) $\overrightarrow{M\Lambda}$, (γ) $\overrightarrow{O\Delta}$.



2 (2-15010). Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}$.

(α) (i) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$.

(ii) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι αντίθετα.

(β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

3. Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$$

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

(β) Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει

$$2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$$

όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}.$$

(α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

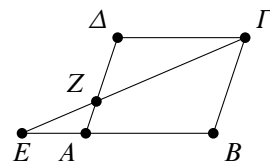
(β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

5 (2-21165). Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$.

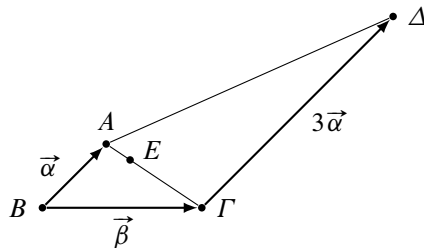
(γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.



6. Στο διπλανό σχήμα έχουμε $(E\Gamma) = 3(AE)$

(α) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{E\Delta}$, $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{E\Delta}$.

(β) Να δείξετε ότι τα σημεία B , E και Δ είναι συνευθειακά.

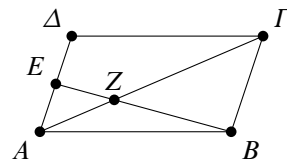


7. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E , Z σημεία τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Delta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

(α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AD}$.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B , Z και E είναι συνευθειακά.



8 (4-21885). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ , E σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ και $A\Gamma = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

(α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(β) (i) Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa |\overrightarrow{\Delta E}|$.

(ii) Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο

1 (2-16579). Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

(α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

(β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του (β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

2 (2-17070). Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

(α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A , B , Γ και Δ .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

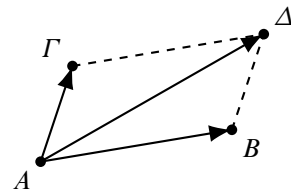
(γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

3 (2-16580). Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$, και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

(α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$,

(β) του διανύσματος $A\Delta$,

(γ) του σημείου Δ .



4 (2-16581). Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

(α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.

(γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

5 (2-15002). Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $\Delta(4, 5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, 1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3, 6)$.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

6 (2-14666). Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$, και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ , και M αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

7 (2-22044). Δίνονται τα σημεία $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ και $\Gamma(5, 1)$.

(α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A, B, Γ .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8 (2-21681). Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.

(α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

(β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

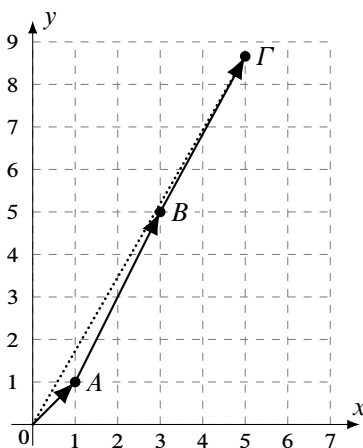
(γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου.

* Μέτρο *

9 (2-18878). Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο Γ . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4), \quad \overrightarrow{B\Gamma} = (2, 5\sqrt{3} - 5),$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:

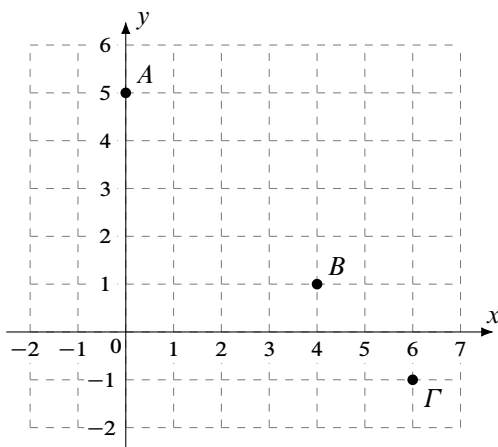


Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OG} = (5, 5\sqrt{3})$.

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OG) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

10 (2-15043). Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(6, -1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

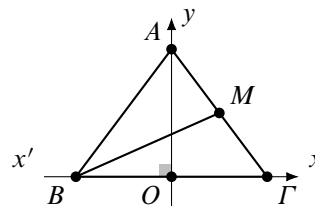
(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ .

11 (2-22557). Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι (i) $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$, (ii) $M(3, 4)$.

(β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .



12 (2-22060). Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(6, 2)$ και $\Delta(3, 4)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

(β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BF}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

13 (2-15854). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

(α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

14 (2-22038). Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

(α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

* Γωνία με τον άξονα $x'x$ *

15 (2-16147). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

(α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

(β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox .

(γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

16 (2-16151). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

(α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

17 (2-19038). Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

(β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

18 (2-22052). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

(β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v} = (8, -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

* * *

19 (4-17076). Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

(β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$.

(δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20 (4-17077). Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$.

(β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ .

(γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;

(δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21 (4-20938). Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$.

(α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$.

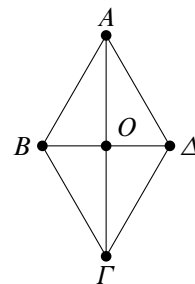
(β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

(γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$.

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1 (2-16144). Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- (α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$,
- (β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BF}$,
- (γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$,
- (δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$,
- (ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GD}$.



2 (2-16141). Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

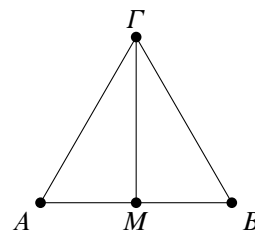
(α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}}), (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BF}}), (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GA}}),$$

$$(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{GM}}), (\widehat{\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GB}}).$$

(β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BF}, \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA}, \quad \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB}.$$



3 (2-15038). Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.

(α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

4 (2-20888). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 5, \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}.$$

Να υπολογίσετε:

(α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

5 (2-15825). Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

(γ) Να βρείτε τη $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$.

6 (2-16428). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με:

$$|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\vec{\beta}| = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{3}{8}$.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

7 (2-20733). Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

(β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

(γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα.

8. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(β) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(γ) Να βρείτε το $|\vec{\gamma}|$.

(δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

9 (3-18243). Θεωρούμε τα διανύσματα, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

(γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$.

(δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

* Αναλυτική μορφή εσωτερικού γινομένου *

10 (2-22554). Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x, y'y$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$. Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}).$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$,

(ii) $\overrightarrow{OM} = \vec{j}$.

(β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

11 (2-15073). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

12 (2-15852). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$. Να υπολογίσετε:

(α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

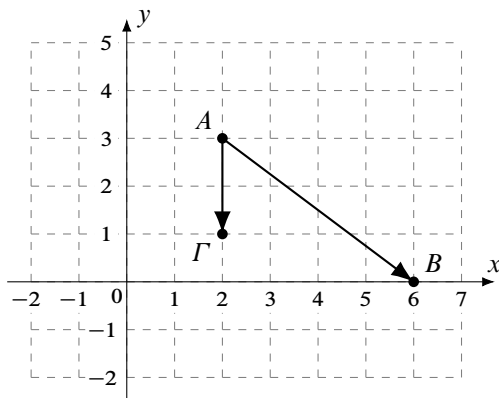
(β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

13 (2-17075). Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

(α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (0, -2)$.

(β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.



14 (2-15186). Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $\Delta(1, -2)$ και $\Gamma(9, 2)$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4, 2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5, 0)$.

(β) $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8, 4)$.

(γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

15 (2-15463). Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, -1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BG}|$.

16 (2-21682). Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$.

17. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 1)$.

(α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(β) Να δείξετε ότι $\sqrt{2}|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.

(γ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

18 (2-20732). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

(α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

19 (2-15317). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

(α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(β) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

(γ) Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα.

20 (2-15379). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3), \vec{\beta} = (3, -1)$. Να υπολογίσετε:

(α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

21 (2-16427). Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3), B(0, 8), \Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

(α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.

* Ορθογώνια τρίγωνα *

22 (2-15252). Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AF} = (3, -1)$.

(α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{BF} = (1, -2)$.

(β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την AF .

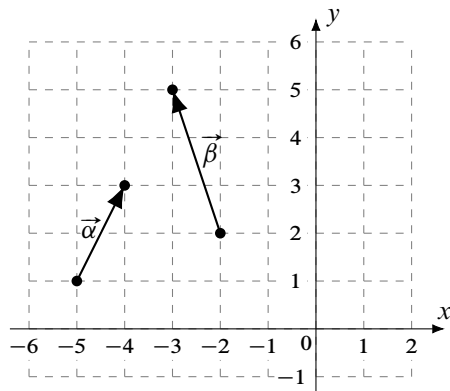
(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

23 (2-20914). Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

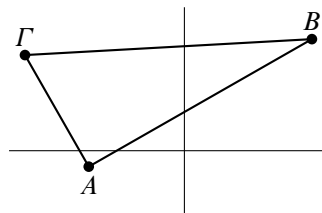
(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.



24 (2-15996). Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$ και $\Gamma(-10, 6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

(β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.



25 (2-14586). Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(5, -2)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

(β) Αν M είναι το μέσο του $\overrightarrow{B\Gamma}$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$.

26 (2-14953). Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$, $\Gamma(1, -4)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

(γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

* Εύρεση κάθετου διανύσματος *

27 (2-22040). Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

(α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

(β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

28 (2-16426). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

(α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

(β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.

29 (2-20773). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

(α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$, να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$.

(γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

30 (2-20685). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{AG}$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

31 (2-22170). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

(β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

(γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

* 4ο θέμα *

32 (4-18547). Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

(i) Τα σημεία A , B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

(ii) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

(β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

(i) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

(ii) Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

33 (4-22063). (α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

(i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \iff \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$,

(ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \iff \vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$,

(β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad |\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι: (i) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$, (ii) $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, (iii) $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$,

34 (4-15320). Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

(α) Να δείξετε ότι:

(i) $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2,$

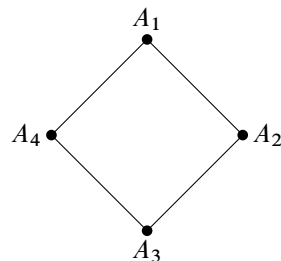
(ii) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2,$

(β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το $OAGB$ είναι ορθογώνιο.

2 Η ευθεία στο επίπεδο

2.1 Εξίσωση ευθείας

1 (2-22049). Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



(α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

(β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.

2 (2-22047). Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.

(α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

(β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$.

3 (2-15027). Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

(α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .

4 (2-18351). Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5), B(3, 3)$. Να υπολογίσετε:

(α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

(γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .

5 (2-15044). Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(6, -1)$.

(α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(β) Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3, 2)$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

6 (2-21965). Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$.

(α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ϵ): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (ϵ).

7 (2-15271). Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

(α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.

(γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

8 (2-16002). Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M(3, \frac{1}{2})$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.

(β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$.

9 (2-15657). Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

(α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .

(β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

10 (2-16766). Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.

(γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

11 (2-18236). Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y = -x + 4$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

(β) Να βρείτε:

(i) το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$,

(ii) την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.

12 (2-22071). Οι πλευρές AB και $A\Delta$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1, 2)$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

(i) Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3, 1)$.

(ii) Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $\Gamma(5, 3)$.

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δυο πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

* * *

13 (4-15275). Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

(α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M . Να βρείτε:

- (i) Την εξίσωση της.
- (ii) Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

- (i) Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB .
- (ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
- (iii) Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

14 (4-14970). Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R}$ (1).

(α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο M των δυο ευθειών.

(β) Έστω $M(1, -2)$. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το M .

(γ) Να βρείτε:

- (i) τα σημεία τομής A, B της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- (ii) για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

15 (4-15029). Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία

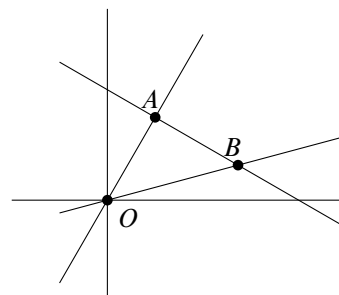
$O(0,0), A(1, \sqrt{3}), B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

(δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.



16 (4-18568). Δίνονται τα σημεία $A(2, 4), B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

- (i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .
- (ii) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

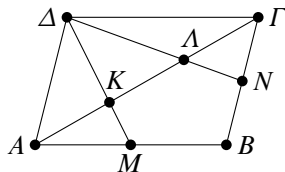
17 (4-17078). Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- (i) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.
- (ii) Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.
- (iii) Το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός ώστε το τετράπλευρο να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

18 (4-22065). Δίνονται τα σημεία $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $\Gamma(10, 4)$, $\Delta(2, 4)$. Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- (α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N .
- (γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$, ΔM , ΔN και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ .
- (δ) Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

2.2 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

1 (2-22059). Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x + 6y = 1$.

- (α) Να εξηγήσετε γιατί το A δεν είναι σημείο της ευθείας ε .
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

2 (2-22171). Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$.

- (α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους M .
- (β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3, 4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2) .
- (γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1) .

3 (2-22072). Δίνονται οι εξισώσεις

$$(1): \lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0 \quad \text{και} \quad (2): (3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0, \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους καθετές.

4 (2-21162). Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, -6)$. Να βρεθούν:

- (α) Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .
- (β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
- (γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

5 (2-22092). Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1, 4)$. Η πλευρά $A\Delta$ έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος $B\Delta$ έχει εξίσωση $y = x + 2$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1, 1)$.
- (β) Αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.

6 (2-21662). Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$.

- (α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B .
- (β) Να βρείτε:
 - (i) την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ε .
 - (ii) το σημείο τομής των ευθειών ε και ε' .
 - (iii) το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ε .

7 (3-15178). Δίνεται η εξίσωση $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

- (α) (i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- (β) (i) Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;
- (ii) Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;
- (γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

8 (4-15004). (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(8, 5)$.

- (β) Αν $\varepsilon_1 : 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2 : 7x - y - 1 = 0$ γωνία $\hat{\phi} = 45^\circ$.
- (γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 .

9 (4-21160). Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $B(\kappa, 0)$ και $\Gamma(0, 2\kappa)$ όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου $OB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $OB\Delta E$ και $OGZH$, τότε:

- (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ και BZ .
- (β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου $OB\Gamma$ που διέρχεται από το O .
- (γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και το ύψος του (β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

10 (4-18244). Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

- (α) Να σχεδιάσετε τις ε_1 , ε_2 στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- (β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα $x'x$.
- (γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των ε_1 , ε_2 είναι 15° .
- (δ) Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

2.3 Εμβαδόν τριγώνου

1 (2-16774). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2, 5)$, $B(3, 6)$ και $\Gamma(-1, -2)$.

- (α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .
- (γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

2 (2-20926). Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0, 2)$, $B(1, 0)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε .
- (β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B .

3 (2-20864). Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 2 = 0$.

- (α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.
- (β) Να δείξετε ότι το σημείο $A(0, 6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 .
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

4 (2-18733). Δίνονται τα σημεία $A(4, 3)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(6, 0)$.

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.
- (β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα.
- (γ) Δίνεται το σημείο $M(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

5 (2-18979). Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$.

- (α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες.
- (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 .
- (γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 .

6 (2-16425). Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2: x = \frac{3}{2}y + 9$.

- (α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
- (β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

7 (2-18240). Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

- (α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) .
- (γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) , (ε) .

8 (2-16771). Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $\Gamma(4, -1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

(α) Να βρεθεί το σημείο B .

(β) Αν $B(5, 0)$:

(i) Να δείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

9 (2-20885). Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$.

10 (2-21260). Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1, 1)$ και $\Gamma(-1, 3)$.

(α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5, 10)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

11 (2-15440). Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$ και $\Gamma(1, 1)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$.

(β) (i) Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

12 (4-14984). Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

(α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών

$(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) .

(γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε.

13 (4-15194). Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

(α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

(β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

(γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ;

14 (4-15273). Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(-2, 2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

(γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

(δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$.
Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

15 (4-15380). Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(β) Για $\alpha = 4$.

(i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(ii) Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

16 (4-20655). Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ και $\Gamma(-2, 0)$.

(α) (i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

(ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$.

(γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (2) αποτελείται από τις ευθείες $\varepsilon_1: x - 4y - 7 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 4y + 11 = 0$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(ii) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός “οι ευθείες $x - 4y - 7 = 0$ και $x - 4y + 11 = 0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $A\Gamma$ ”.

17 (4-20728). Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

(α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο αντικανονικό σύστημα αξόνων.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx' .

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(3, 3)$.

(δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

18 (4-20861). Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M .

(β) (i) Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy .

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$.

(γ) Αν (ε_1): $y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O .

19 (4-22067). Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ με θετική κλίση λ .

(α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι:

$$y = \lambda_1 x, \quad \text{με } \lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

(β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι:

$$y = \lambda_2 x, \quad \text{με } \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

(γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του (α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\phi 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$.

20 (4-22265). Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα ακόλουθα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(\mu - 1, 3\mu - 2)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$.

(β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

(γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

(δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A , απέχει απόσταση ίση με 1.

3 Κωνικές τομές

3.1 Ο κύκλος

1 (2-18700). Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

(α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.

(i) Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C .

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .

2 (2-18241). Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

(α) τον κύκλο C .

(β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον $y'y$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον $x'x$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

3 (2-22056). Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2 + y^2 \leq 9$.

(α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy .

(β) Υπάρχει σημείο A στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}| = 4$, όπου O η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4 (2-16773). (α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

(β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

(i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A .

(ii) Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.

* * *

5 (2-15028). Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία (ϵ) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

(α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .

(β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1, 2)$ από την ευθεία (ϵ) είναι ίση με 2.

(γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) εφάπτεται στον κύκλο C .

6 (2-22172). Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2.

(β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

7 (2-15994). Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

8 (2-15680). Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.

(β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

(γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

9 (2-18968). Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ (1).

(α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3, 4)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

(β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y = 0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους.

(γ) Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται».

10 (2-22279). Δίνεται η εξίσωση $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$ (1). Να αποδείξετε ότι:

(α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.

(β) Η αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K, R) .

(γ) Η ευθεία (ε): $x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K, R) .

11 (2-22147). Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1).

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και ακτίνα $R = 2$.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ είναι σημείο του κύκλου (K, R) .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K, R) στο A .

* * *

12 (2-21962). Δίνονται τα σημεία $A(0, 3)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(1, 0)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή.
 (β) Να βρείτε το μέσο K της υποτείνουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.
 (γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

13 (2-16808). Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθυγράμμου τμήματος AB .
 (β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ .
 (γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C) .

14 (2-20890). Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3, -3)$, $B(2, -8)$ και $\Gamma(7, -3)$.

Να βρείτε:

- (α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
 (β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$.

* * *

15 (4-14954). Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και

$(\varepsilon_2): (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .
 (β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .
 (γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

16 (4-15030). Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

- (α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .
 (β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.
 (γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες (η_1) , (η_2) που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
 (δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών (η_1) , (η_2) .

17 (4-15080). Δίνονται οι εξισώσεις

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0, \quad (1)$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0. \quad (2)$$

- (α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1, 0)$, $\Lambda(3, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$, αντίστοιχα.
- (β) (i) Να βρείτε το μήκος της διακέντρου ($K\Lambda$).
- (ii) Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .
- (γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

18 (4-15081). Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0.$$

- (α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0)$, $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$, αντίστοιχα.
- (β) (i) Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 .
- (ii) Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

19 (4-15082). Δίνονται δυο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8,$$

$$C_2: (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 18.$$

- (α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ($K\Lambda$), όπου K, Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- (β) (i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$.
- (ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

20 (4-15189). Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(2, -2)$.

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .
- (β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y + 1)^2 = 5$.
- (γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$.
- (δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C .

21 (4-15272). Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

- (α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.
 (γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

22 (4-15432). Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2ky + 4 = 0$ (1) με $k \in \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
 (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.
 (γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.
 (δ) Για $k = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2, 2)$.

23 (4-15628). Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0$ (1), όπου $k \in (0, +\infty)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.
 (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.
 (γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

24 (4-15646). Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

- (α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.
 (β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2 .
 (γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.

25 (4-18237). Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2), B(3, 2), \Gamma(1, 4)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$.
 Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.
 (γ) Να βρείτε σημείο K στην μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ που ισαπέχει από τα A, B .
 (δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

26 (4-18521). Δίνονται τα σημεία $A(1, 2), B(2, 4), \Gamma(3, 1)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.
 (β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ .
 (γ) Αν ο κύκλος C έχει εξίσωση $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις

των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

27 (4-18570). Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x - 4y = \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

(β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B .

(i) Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$.

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.

(iii) Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή.

28 (4-22559). Δίνεται η εξίσωση $x(x - 4) + y(y - 2) = 2(x + y - 4)$ (1).

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3, 2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

(β) Δίνονται τα σημεία $A(4, 4)$ και $B(2, 0)$.

(i) Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

(ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB .

(γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$.

29 (4-21349). Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις:

$$C : x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon : 4x + 3y - 10 = 0 \quad (2)$$

(α) (i) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C) .

(ii) Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.

(iii) Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) .

(β) Αν είναι $A(1, 2)$ και $B(4, -2)$, τότε:

(i) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O .

3.2 Η παραβολή

1 (2-21248). Δίνεται το σημείο $E(2, 0)$, η ευθεία $\delta: x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου.

(α) Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου M από το E ως συνάρτηση των x, y .

(β) Να βρείτε την απόσταση $d(M, \delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x, y .

(γ) Αν ισχύει $(ME) = d(M, \delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

2 (2-20235). Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

(α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$.

3 (2-22190). Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1).

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) .

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, -1)$ είναι σημείο της παραβολής.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της $A(1, -1)$.

4 (2-18242). Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

(β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4, 4)$.

(γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε) .

5 (2-18701). Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).

(α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(2, 2)$.

(γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

6 (2-21307). Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.

(β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.

(γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) .

7 (4-22275). Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

- (α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ .
- (β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

8 (4-18741). Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = \alpha \cdot x$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(16, \alpha + 4)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.
- (β) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα δ της παραβολής.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της παραβολής C η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2 : -x + 2y + 4 = 0$.
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C_1 με κέντρο την κορυφή της παραβολής ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ε_1 του ερωτήματος (γ).

9 (4-18372). Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

- (α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- (β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .
- (γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

10 (4-20092). Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\varepsilon : \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

- (α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ε .
- (β) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .
- (δ) Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε ;

3.3 Η έλλειψη

1 (2-20718). Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

(α) Να βρείτε τις εστίες της.

(β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

(γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

2 (2-20658). Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha = 4$, $\beta = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$.

(β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (C).

(γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

3 (2-21648). Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3, 0)$, $E'(-3, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{12}{5})$.

(α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$.

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$.

4 (2-21647). Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4, 0)$, $E'(-4, 0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

(α) την εξίσωση της C .

(β) την εκκεντρότητα της C .

(γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$.

5 (2-22192). Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ (1).

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' .

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0, 9)$ είναι σημείο της έλλειψης.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $B(0, 9)$.

6 (2-21308). Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους.

(β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

(γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0, 4)$.

3.4 Η υπερβολή

1 (2-21651). Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5, 0)$, $E'(-5, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$.

(α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

2 (2-21218). Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1$, $(C_2): y^2 - x^2 = 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0)$, $E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.

(β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1 E_2 E'_1 E'_2$ είναι τετράγωνο.

3 (2-20721). Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(α) Να βρείτε τις εστίες της C .

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

(γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτες της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

4 (2-21649). Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5, 0)$, $E'(-5, 0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.
Να βρείτε:

(α) την εξίσωση της C .

(β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

(γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

5 (2-22566). Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

(α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1, 0)$ και $A'(-1, 0)$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.

6 (2-22169). Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

(β) Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

(γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$.

A Το πρώτο θέμα

1 (1-21973). (α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(ii) Η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(iii) Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

(iv) Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

(v) Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = a^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

2 (1-21152). (α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

(ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.

(iii) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

(iv) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1, 0)$.

(v) Η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.