

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Η πραγματική ευθεία



Δύο πραγματικοί αριθμοί α και β λέγονται **αντίθετοι** αν το άθροισμα τους είναι μηδέν

$$\alpha + \beta = 0.$$

Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν αντίθετο!

Δύο πραγματικοί αριθμοί α και β λέγονται **αντίστροφοι** αν το γινόμενο τους είναι ίσο με 1

$$\alpha \cdot \beta = 1.$$

Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, **εκτός από το μηδέν**, έχουν αντίστροφο!

Στην πραγματική ευθεία ορίζονται δύο πράξεις: η **πρόσθεση** και ο **πολλαπλασιασμός**.

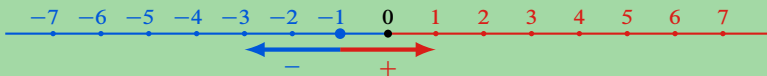
$$2 - 3 = 2 + (-3) = -1, \quad 4 : 2 = 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Προσοχή στα πρόσημα!

Το περισσότερα λάθη στα γραπτά έχουν να κάνουν με πρόσημα!

Πρόσθεση με αρνητικούς αριθμούς:

$$-1 + 2 = 1, \quad -1 - 2 = -3$$



Γινόμενο με αρνητικούς αριθμούς:

- Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικό.
- Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικό.

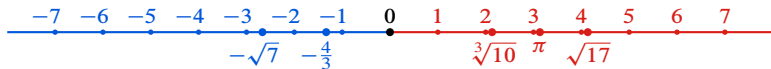
$$2 \cdot (-2) = -4, \quad -2 \cdot (-2) = 4.$$

Για περισσότερους από δύο παράγοντες, μετρώ τον αριθμό των αρνητικών παραγόντων.

- Αν ο αριθμός αυτός είναι άρτιος, το γινόμενο είναι θετικό.
- Αν ο αριθμός αυτός είναι περιττός, το γινόμενο είναι αρνητικό.

$$-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Διάταξη



- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

Διάταξη



- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } \frac{3}{5} > \frac{2}{3} \implies 3 \cdot 3 > 2 \cdot 5 \implies 9 > 10 \text{ δεν ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν λάθος! Άρα $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

Διάταξη



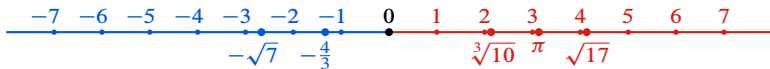
- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } \frac{3}{5} > \frac{2}{3} \implies 3 \cdot 3 > 2 \cdot 5 \implies 9 > 10 \text{ δεν ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν λάθος! Άρα $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

- Ποιος από τους αριθμούς $-\frac{4}{3}$ και -1 είναι μεγαλύτερος;

Διάταξη



- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } \frac{3}{5} > \frac{2}{3} \implies 3 \cdot 3 > 2 \cdot 5 \implies 9 > 10 \text{ δεν ισχύει!}$$

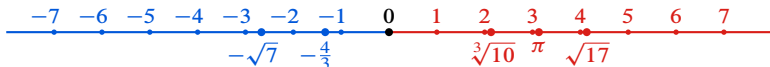
Η υπόθεση μου ήταν λάθος! Άρα $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

- Ποιος από τους αριθμούς $-\frac{4}{3}$ και -1 είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } -\frac{4}{3} < -1 \implies (-3) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) > (-3) \cdot (-1) \implies 4 > 3 \text{ ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν σωστή! Άρα $-\frac{4}{3} < -1$.

Διάταξη



- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } \frac{3}{5} > \frac{2}{3} \implies 3 \cdot 3 > 2 \cdot 5 \implies 9 > 10 \text{ δεν ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν λάθος! Άρα $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

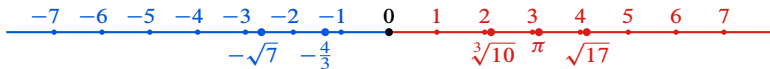
- Ποιος από τους αριθμούς $-\frac{4}{3}$ και -1 είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } -\frac{4}{3} < -1 \implies (-3) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) > (-3) \cdot (-1) \implies 4 > 3 \text{ ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν σωστή! Άρα $-\frac{4}{3} < -1$.

- Να βρείτε μεταξύ ποιων δύο διαδοχικών ακεραίων βρίσκεται ο αριθμός $\sqrt{17}$.

Διάταξη



- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } \frac{3}{5} > \frac{2}{3} \implies 3 \cdot 3 > 2 \cdot 5 \implies 9 > 10 \text{ δεν ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν λάθος! Άρα $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

- Ποιος από τους αριθμούς $-\frac{4}{3}$ και -1 είναι μεγαλύτερος;

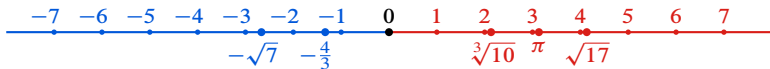
$$\text{Υποθέτω ότι } -\frac{4}{3} < -1 \implies (-3) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) > (-3) \cdot (-1) \implies 4 > 3 \text{ ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν σωστή! Άρα $-\frac{4}{3} < -1$.

- Να βρείτε μεταξύ ποιων δύο διαδοχικών ακεραίων βρίσκεται ο αριθμός $\sqrt{17}$.

$$16 < 17 < 25 \implies \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \implies 4 < \sqrt{17} < 5.$$

Διάταξη



- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } \frac{3}{5} > \frac{2}{3} \implies 3 \cdot 3 > 2 \cdot 5 \implies 9 > 10 \text{ δεν ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν λάθος! Άρα $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

- Ποιος από τους αριθμούς $-\frac{4}{3}$ και -1 είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } -\frac{4}{3} < -1 \implies (-3) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) > (-3) \cdot (-1) \implies 4 > 3 \text{ ισχύει!}$$

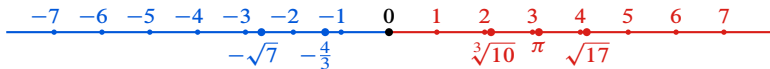
Η υπόθεση μου ήταν σωστή! Άρα $-\frac{4}{3} < -1$.

- Να βρείτε μεταξύ ποιων δύο διαδοχικών ακεραίων βρίσκεται ο αριθμός $\sqrt{17}$.

$$16 < 17 < 25 \implies \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \implies 4 < \sqrt{17} < 5.$$

- Να δείξετε ότι $2 < \sqrt[3]{10} < 3$.

Διάταξη



- Ποιος από τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } \frac{3}{5} > \frac{2}{3} \implies 3 \cdot 3 > 2 \cdot 5 \implies 9 > 10 \text{ δεν ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν λάθος! Άρα $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

- Ποιος από τους αριθμούς $-\frac{4}{3}$ και -1 είναι μεγαλύτερος;

$$\text{Υποθέτω ότι } -\frac{4}{3} < -1 \implies (-3) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) > (-3) \cdot (-1) \implies 4 > 3 \text{ ισχύει!}$$

Η υπόθεση μου ήταν σωστή! Άρα $-\frac{4}{3} < -1$.

- Να βρείτε μεταξύ ποιων δύο διαδοχικών ακεραίων βρίσκεται ο αριθμός $\sqrt{17}$.

$$16 < 17 < 25 \implies \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \implies 4 < \sqrt{17} < 5.$$

- Να δείξετε ότι $2 < \sqrt[3]{10} < 3$.

$$2 < \sqrt[3]{10} < 3 \implies 2^3 < (\sqrt[3]{10})^3 < 3^3 \implies 8 < 10 < 27 \text{ ισχύει!}$$

Σύνολα



Ο αριθμός x είναι θετικός και ο αριθμός y είναι αρνητικός:

$$x > 0 \iff x \in (0, +\infty), \quad y < 0 \iff y \in (-\infty, 0).$$

• Έστω $\alpha < \beta$.

Ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος του α και μικρότερος του β :

$$\alpha < x < \beta \iff x \in (\alpha, \beta).$$



Ο αριθμός x είναι μικρότερος του α ή μεγαλύτερος του β :

$$x < \alpha \quad \text{ή} \quad x > \beta \iff x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty).$$

Σύνολα



Ο αριθμός x είναι θετικός και ο αριθμός y είναι αρνητικός:

$$x > 0 \iff x \in (0, +\infty), \quad y < 0 \iff y \in (-\infty, 0).$$

• Έστω $\alpha < \beta$.

Ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος του α και μικρότερος του β :

$$\alpha \leq x < \beta \iff x \in [\alpha, \beta).$$



Ο αριθμός x είναι μικρότερος ή ίσος του α ή μεγαλύτερος του β :

$$x \leq \alpha \quad \text{ή} \quad x > \beta \iff x \in (-\infty, \alpha] \cup (\beta, +\infty).$$

Πολυώνυμο 1ου βαθμού

$$P(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha \neq 0.$$

- Το πολυώνυμο έχει μοναδική ρίζα! Ποια είναι αυτή;
- Με άλλα λόγια, για ποια τιμή του x το πολυώνυμο μηδενίζεται;

$$P(x) = 0 \iff \alpha x + \beta = 0 \iff \alpha x = -\beta \iff x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Πολυώνυμο 1ου βαθμού

$$P(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha \neq 0.$$

- Το πολυώνυμο έχει μοναδική ρίζα! Ποια είναι αυτή;
- Με άλλα λόγια, για ποια τιμή του x το πολυώνυμο μηδενίζεται;

$$P(x) = 0 \iff \alpha x + \beta = 0 \iff \alpha x = -\beta \iff x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ποιο είναι το πρόσημο του $P(x)$ όταν $\alpha > 0$;

$$P(x) > 0 \iff \alpha x + \beta > 0 \iff \alpha x > -\beta \iff \frac{1}{\alpha} \alpha x > \frac{1}{\alpha} (-\beta) \iff x > -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Αντίστοιχα, $P(x) < 0 \iff x < -\frac{\beta}{\alpha}.$

Πολυώνυμο 1ου βαθμού

$$P(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha \neq 0.$$

- Το πολυώνυμο έχει μοναδική ρίζα! Ποια είναι αυτή;
- Με άλλα λόγια, για ποια τιμή του x το πολυώνυμο μηδενίζει;

$$P(x) = 0 \iff \alpha x + \beta = 0 \iff \alpha x = -\beta \iff x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ποιο είναι το πρόσημο του $P(x)$ όταν $\alpha > 0$;

$$P(x) > 0 \iff \alpha x + \beta > 0 \iff \alpha x > -\beta \iff \frac{1}{\alpha} \alpha x > \frac{1}{\alpha} (-\beta) \iff x > -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Αντίστοιχα, $P(x) < 0 \iff x < -\frac{\beta}{\alpha}.$

Ποιο είναι το πρόσημο του $P(x)$ όταν $\alpha < 0$;

$$P(x) > 0 \iff \alpha x + \beta > 0 \iff \alpha x > -\beta \iff \frac{1}{\alpha} \alpha x < \frac{1}{\alpha} (-\beta) \iff x < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Αντίστοιχα, $P(x) < 0 \iff x > -\frac{\beta}{\alpha}.$

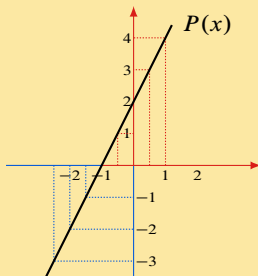
Πολυώνυμο 1ου βαθμού

$$P(x) = \alpha x + \beta \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$\alpha > 0$	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
	-	0	+
$\alpha < 0$	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
	+	0	-

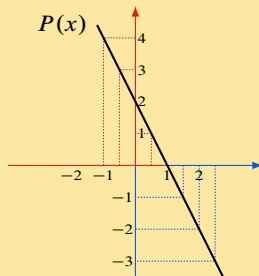
$$P(x) = 2x + 2.$$

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+



$$P(x) = -2x + 2.$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-



Πολυώνυμο 2ου βαθμού

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

ρίζες $\longleftrightarrow$ παραγοντοποίηση $\longleftrightarrow$ πρόσημο

- $\Delta > 0 \implies 2$ ρίζες: $x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$

	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$					
$a > 0$	+	0	-	0	+
$a < 0$	-	0	+	0	-

- $\Delta = 0 \implies 1$ διπλή ρίζα: $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$

$$P(x) = \alpha(x - x_0)^2 \begin{cases} \bullet \text{ Αν } \alpha > 0, \text{ τότε } P(x) \geq 0 \\ \bullet \text{ Αν } \alpha < 0, \text{ τότε } P(x) \leq 0 \end{cases}$$

- $\Delta < 0 \implies$ καμία ρίζα!

$$P(x) \begin{cases} \bullet \text{ Αν } \alpha > 0, \text{ τότε } P(x) > 0 \\ \bullet \text{ Αν } \alpha < 0, \text{ τότε } P(x) < 0 \end{cases}$$

- Για το πρόσημο του πολυωνύμου μέσω της γραφικής του παράστασης [δες εδώ](#)



Διακρίνουσα και ρίζες

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

$$\Delta > 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει δύο διαφορετικές ρίζες} \end{cases}$$

Διακρίνουσα και ρίζες

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

$$\Delta > 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει δύο διαφορετικές ρίζες} \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει μια διπλή ρίζα} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ είναι ένα τέλει τετράγωνο} \end{cases}$$

Διακρίνουσα και ρίζες

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

$$\Delta > 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει δύο διαφορετικές ρίζες} \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει μια διπλή ρίζα} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ είναι ένα τέλει τετράγωνο} \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ δεν έχει ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο} \end{cases}$$

Διακρίνουσα και ρίζες

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

$$\Delta > 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει δύο διαφορετικές ρίζες} \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει μια διπλή ρίζα} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ είναι ένα τέλει τετράγωνο} \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ δεν έχει ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο} \end{cases}$$

$$\Delta \geq 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα} \end{cases}$$

Διακρίνουσα και ρίζες

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

$$\Delta > 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει δύο διαφορετικές ρίζες} \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει μια διπλή ρίζα} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ είναι ένα τέλει τετράγωνο} \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ δεν έχει ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο} \end{cases}$$

$$\Delta \geq 0 \begin{cases} \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει ρίζες} \\ \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα} \end{cases}$$

$$\Delta \leq 0 \text{ — } \bullet \text{ Το πολυώνυμο } P(x) \text{ έχει το πολύ μια ρίζα}$$

Παραμετρικά πολυώνυμα

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + \lambda x - \lambda - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παραμετρικά πολυώνυμα

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + \lambda x - \lambda - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$:

$$\Delta = \lambda^2 - 4(-\lambda - 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 \geq 0.$$

Παραμετρικά πολυώνυμα

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + \lambda x - \lambda - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$:

$$\Delta = \lambda^2 - 4(-\lambda - 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 \geq 0.$$

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + \lambda x + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο (θετικό);

Παραμετρικά πολυώνυμα

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + \lambda x - \lambda - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$:

$$\Delta = \lambda^2 - 4(-\lambda - 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 \geq 0.$$

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + \lambda x + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο (θετικό);

Λύση. Αρκεί να βρω για ποια λ ισχύει $\Delta < 0$. Επειδή $\Delta = \lambda^2 - 4$, λύνω την ανίσωση

$$\lambda^2 - 4 < 0.$$

Οι ρίζες του $\lambda^2 - 4$ είναι το -2 και 2 :

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
Δ	+	0	-	0	+

Άρα, το πολυώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο (θετικό) για κάθε $\lambda \in (-2, 2)$.

