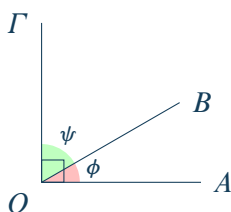
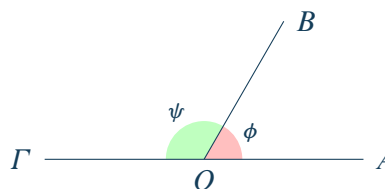


Σχέσεις γωνιών

- Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία (90°). Στο σχ. 1, οι γωνίες $\hat{\phi} = A\hat{O}B$ και $\hat{\psi} = B\hat{O}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές: $\hat{\phi} + \hat{\psi} = 90^\circ$. Η $\hat{\phi}$ λέγεται και **συμπλήρωμα** της $\hat{\psi}$ και αντίστροφα.
- Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία (180°). Στο σχ. 2, οι γωνίες $\hat{\phi} = A\hat{O}B$ και $\hat{\psi} = B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές: $\hat{\phi} + \hat{\psi} = 180^\circ$. Η $\hat{\phi}$ λέγεται και **παραπλήρωμα** της $\hat{\psi}$ και αντίστροφα.

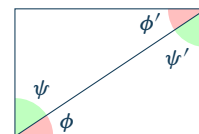


σχ. 1



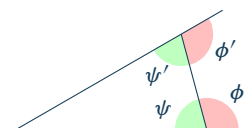
σχ. 2

Εφαρμογή 1. Αν στο διπλανό ορθογώνιο ισχύει ότι $\hat{\phi} = \hat{\phi}'$, να αιτιολογήσετε γιατί $\hat{\psi} = \hat{\psi}'$.



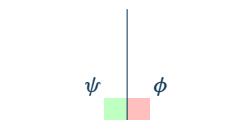
Απάντηση. Επειδή το σχήμα είναι ορθογώνιο, οι γωνίες $\hat{\phi}$, $\hat{\psi}$, όπως επίσης και οι γωνίες $\hat{\phi}'$, $\hat{\psi}'$, είναι συμπληρωματικές. Άρα, $\hat{\psi} = \hat{\psi}'$ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών.

Εφαρμογή 2. Αν στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $\hat{\phi} = \hat{\phi}'$, να αιτιολογήσετε γιατί $\hat{\psi} = \hat{\psi}'$.



Απάντηση. Οι γωνίες $\hat{\phi}$, $\hat{\psi}$, όπως επίσης και οι γωνίες $\hat{\phi}'$, $\hat{\psi}'$, είναι παραπληρωματικές. Άρα, $\hat{\psi} = \hat{\psi}'$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Πόρισμα. Δύο ίσες και παραπληρωματικές γωνίες είναι ορθές.

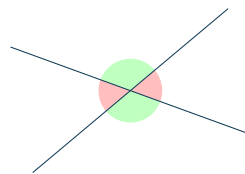


Απόδειξη. Έστω $\hat{\phi}$, $\hat{\psi}$ δύο παραπληρωματικές ίσες γωνίες. Τότε $\hat{\phi} + \hat{\psi} = 180^\circ$. Επειδή $\hat{\phi} = \hat{\psi}$, έχουμε

$$\hat{\phi} + \hat{\phi} = 180^\circ \implies 2\hat{\phi} = 180^\circ \implies \hat{\phi} = 90^\circ.$$

Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν**, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

Θεώρημα. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

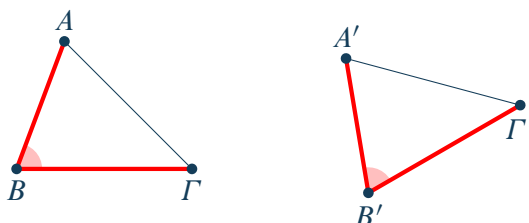


1 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο (ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

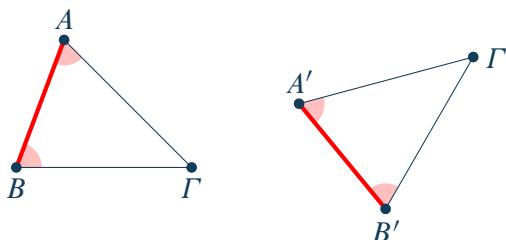
- (1) $AB = A'B'$
- (2) $B\Gamma = B'\Gamma'$
- (3) $\hat{B} = \hat{B}'$



2ο κριτήριο (ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

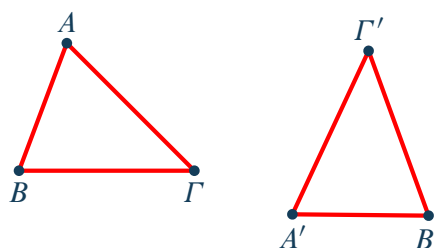
- (1) $AB = A'B'$
- (2) $\hat{A} = \hat{A}'$
- (3) $\hat{B} = \hat{B}'$



3ο κριτήριο (ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

- (1) $AB = A'B'$
- (2) $A\Gamma = A'\Gamma'$
- (3) $B\Gamma = B'\Gamma'$

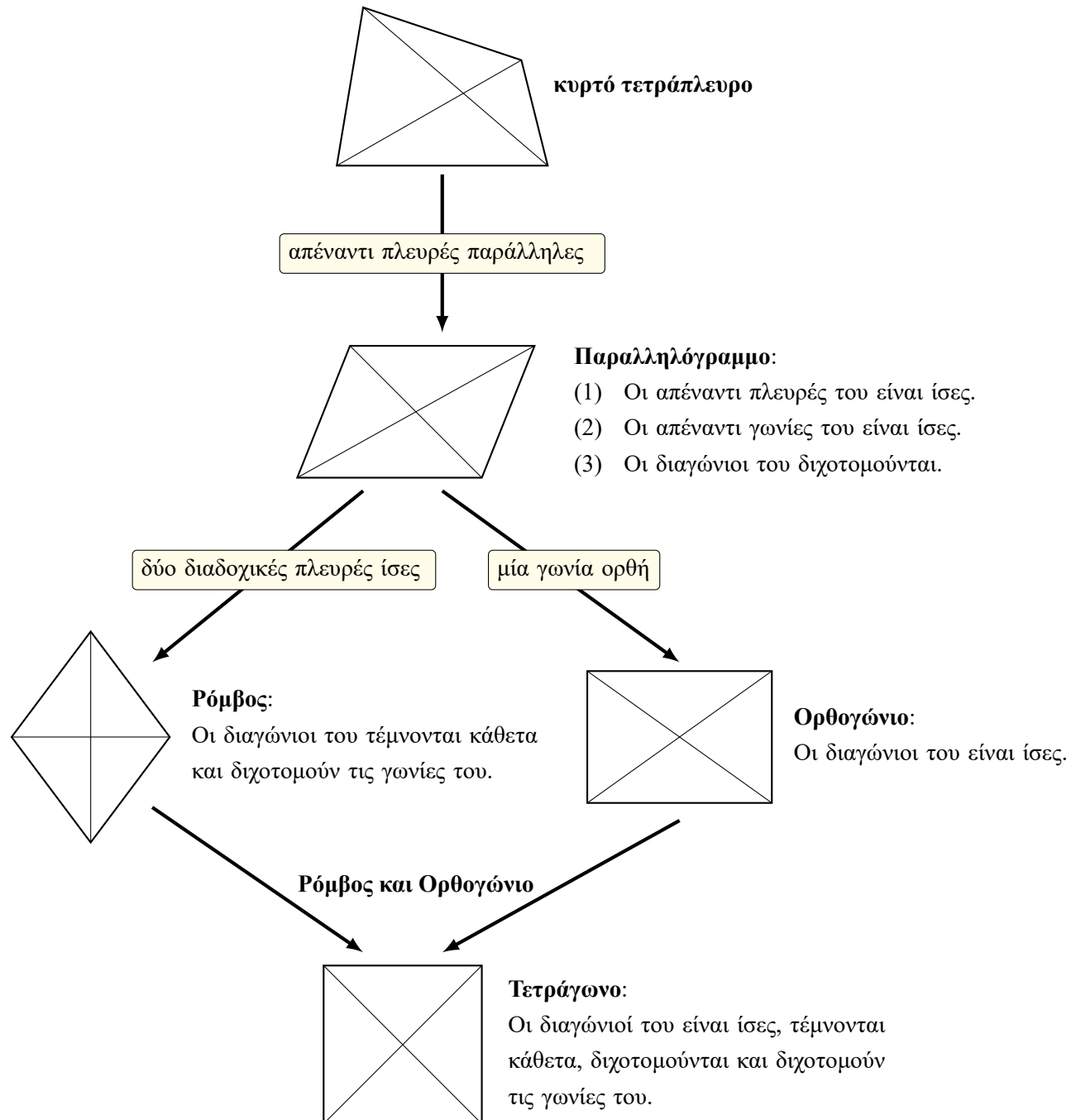


Δύο κριτήρια για ορθογώνια τρίγωνα

- (1) Αν δύο **ορθογώνια** τρίγωνα έχουν *δύο ομόλογες πλευρές* τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.
- (2) Αν δύο **ορθογώνια** τρίγωνα έχουν *μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία* αντίστοιχα ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

2 Παραλληλόγραμμα

2.1 Ορισμοί και ιδιότητες



Παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Ορθογώνιο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Ιδιότητες:

- (i) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Ρόμβος

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Ιδιότητες:

- (i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- (ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

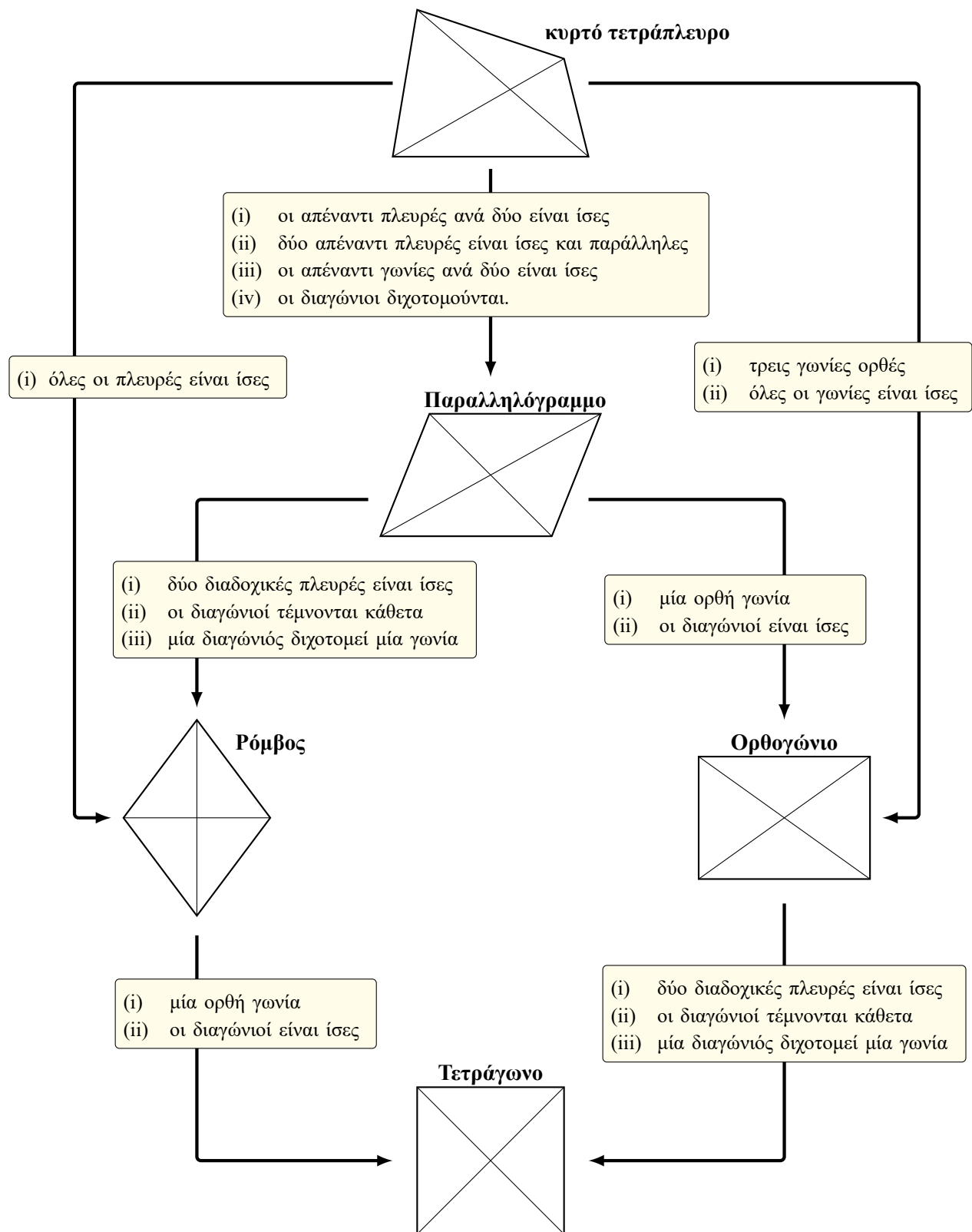
Τετράγωνο

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Ιδιότητες:

- (i) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- (iii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

2.2 Κριτήρια



Παραλληλόγραμμο. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- (ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Ορθογώνιο. Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- (iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- (iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Ρόμβος. Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- (iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

Τετράγωνο. Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- (iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- (vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.