

Ασκήσεις Γεωμετρίας

Α Λυκείου

Νικόλαος Τόμης

ΔΙΑΠΟΛ 2023-24

Περιεχόμενα

1	Κριτήρια ισότητας τριγώνων	2
1.1	1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (§3.2)	2
1.2	2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (§3.3)	3
1.3	3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (§3.4)	3
1.4	Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων (§3.6)	5
2	Κύκλος-μεσοκάθετος-διχοτόμος (§3.7)	7
3	Ανισοτικές σχέσεις	9
3.1	Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (§3.10)	9
3.2	Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών (§3.11)	9
3.3	Τριγωνική ανισότητα (§3.12)	10
4	Ο κύκλος	12
4.1	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (§3.14)	12
4.2	Εφαπτόμενα τμήματα (§3.15)	12
4.3	Σχετικές θέσεις δυο κύκλων (§3.16)	13
5	Παράλληλες ευθείες (§4.2)	15
5.1	Άθροισμα γωνιών τριγώνου (§4.6)	17
5.2	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου (§4.8)	18
6	Παραλληλόγραμμο (§5.2–5.5)	18
6.1	Ορθογώνιο (§5.3)	19
6.2	Ρόμβος (§5.4)	20
6.3	Τετράγωνο (§5.5)	21
7	Εφαρμογές στα τρίγωνα (§5.6)	22
7.1	Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου (§5.9)	22
8	Τραπεζίο (§5.10)	24
8.1	Ισοσκελές τραπέζιο (§5.11)	24

1 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1.1 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (§3.2)

1 (2-12635). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ προς τα B , Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

(β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

2 (2-36170). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $BE = \Gamma\Delta$,

(β) $B\Delta = \Gamma E$,

(γ) $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{E\Gamma B}$.

3 (2-34774). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Gamma E}$,

(β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα,

(γ) η AM είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

4 (2-36099). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

(α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα,

(β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $ME\Gamma$ είναι ίσα,

(γ) το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

5 (2-36100). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda = BM$. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές,

(β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$.

6 (2-36104). Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $MA = MB$,

(β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{M}B$.

1.2 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (§3.3)

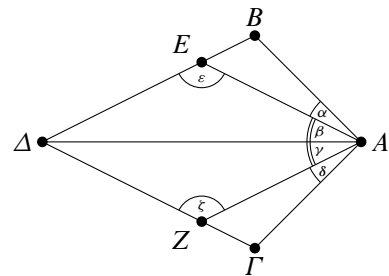
7 (2-34780). Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και GA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$.

(β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

(i) τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα,

(ii) $Z\Delta = \frac{\Delta E}{2}$.



8 (2-34511). Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα,

(β) οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι ίσες.

9 (2-34493). Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

(α) Αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(β) Αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

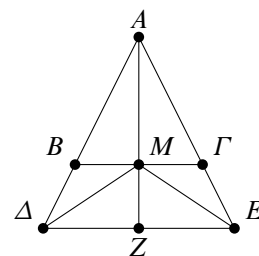
1.3 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (§3.4)

10 (2-12636). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$, ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

(β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\hat{\Delta}E$ είναι ίση με τη γωνία $M\hat{E}\Delta$.

(γ) Αν η AM τέμνει την ΔE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE .



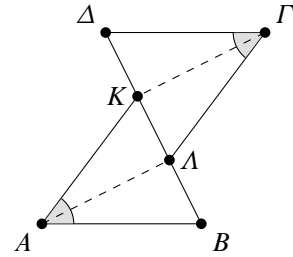
11 (2-13826). Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.

(β) Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

(i) Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(ii) Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.



12 (2-34784). Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

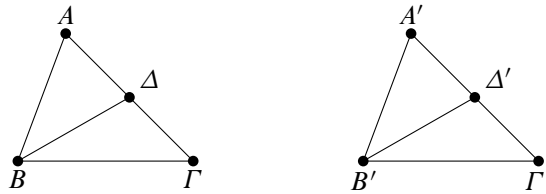
(α) τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα,

(β) η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$.

13 (2-13518). Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

(α) $\hat{A} = \hat{A}'$,

(β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



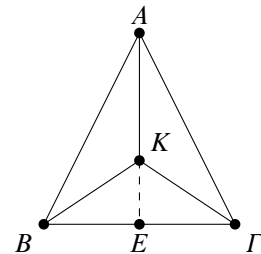
14 (2-34773). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

(i) τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα,

(ii) η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

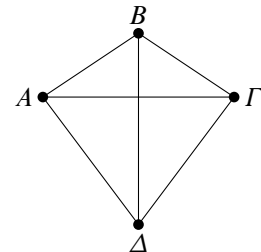
(β) Αν η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E , τότε να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.



15 (2-36102). Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

(α) η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$,

(β) η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



1.4 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων (§3.6)

1 (2-34497). Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα,
- (β) τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

2 (2-34405). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $M\Delta = ME$,
- (β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

3 (2-34404). Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $MK = M\Lambda$,
- (β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{M}\Lambda$.

4 (2-34401). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

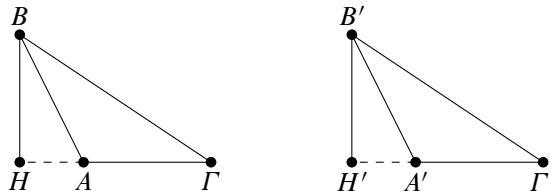
- (α) τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα,
- (β) $A\Delta = AE$.

5 (2-34387). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.
- (β) Έστω EH και ΔZ οι κάθετες από τα σημεία E και Δ αντίστοιχα στη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $EH = \Delta Z$.

6 (2-12149). Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' > 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

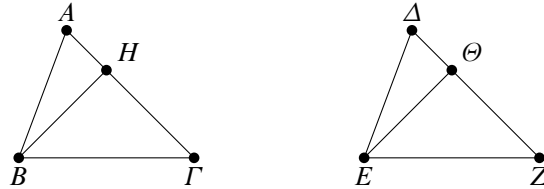
- (α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.
- (β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



7 (2-13517). Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$. Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $AB = \Delta E$.

(β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

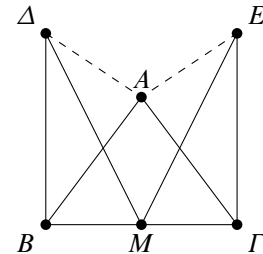


8 (2-37012). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα,

(β) $A\Delta = AE$.

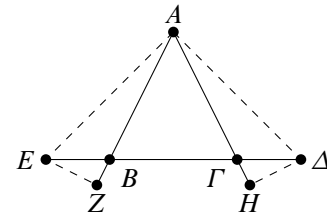


9 (2-36332). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

(α) $A\Delta = AE$,

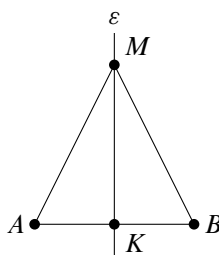
(β) $EZ = \Delta H$.



2 Κύκλος-μεσοκάθετος-διχοτόμος (§3.7)

- Ο **κύκλος** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα σημείο.
- Η **μεσοκάθετος** ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα του.
- Η **διχοτόμος** μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

1 (Πόρισμα III, σελ. 42). Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



Απόδειξη. Έστω ε η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB . Έστω M ένα τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου και K το σημείο τομής της με το AB . Συγκρίνω τα ορθογώνια ($MK \perp AB$) τρίγωνα AMK και BMK :

(1) MK κοινή.

(2) $AK = BK$ (K μέσο AB).

Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν όλες τις γωνίες και τις ομόλογες πλευρές τους ίσες. Άρα $MA = MB$. Δηλαδή το τυχαίο σημείο M της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος AB . $\square$

2 (Πόρισμα II, σελ. 45). Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα τυχαίο σημείο M που ισαπέχει από τα άκρα του. Έστω επίσης K το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB . Θα δείξω ότι η MK είναι μεσοκάθετος. Αρκεί να δείξω ότι $\widehat{AKM} = \widehat{BKM} = 90^\circ$. Συγκρίνω τα τρίγωνα AMK και BMK :

(1) MK κοινή.

(2) $AK = BK$ (K μέσο AB).

(3) $AM = BM$ από υπόθεση.

Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν όλες τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Άρα $\widehat{AKM} = \widehat{BKM} = 90^\circ$ ως ίσες παραπληρωματικές γωνίες, οπότε MK μεσοκάθετος. $\square$

3 (Θεώρημα IV, σελ. 51). Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

4 (2-34424). Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

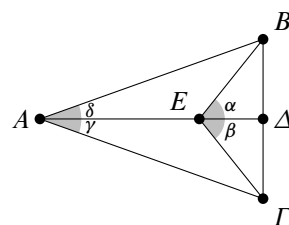
- (α) το τρίγωνο BIG είναι ισοσκελές,
- (β) οι γωνίες $\hat{AIG}$ και $\hat{AIB}$ είναι ίσες,
- (γ) η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

5 (2-34503). Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα,
- (β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

6 (2-34516). Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

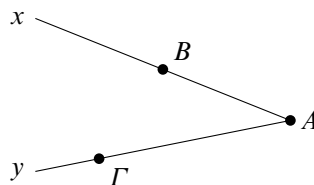
- (α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.
- (β) Το τρίγωνο ΓEB είναι ισοσκελές.
- (γ) Η ευθεία AD είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.



7 (3-36226). Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Ο πλάτανος που βρίσκεται στο σημείο B έχει μικρότερη απόσταση από το σημείο A , σε σχέση με την απόσταση που έχει από το σημείο A ο πλάτανος που βρίσκεται στο σημείο Γ . Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- (α) ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.
- (β) ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
- (γ) ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια και ισαπέχει και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



3 Ανισοτικές σχέσεις

3.1 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (§3.10)

Θεώρημα (σελ. 59). Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Πόρισμα (σελ. 59). (α) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
(β) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

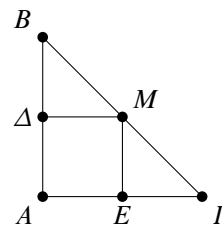
3.2 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών (§3.11)

Θεώρημα (σελ. 60). Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Πόρισμα (σελ. 60). (α) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
(β) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
(γ) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

8 (2-36331). Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε:
(i) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα,
(ii) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
(β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.



9 (2-34496). Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

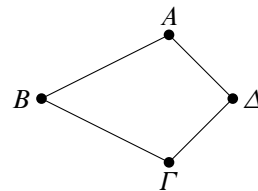
- (α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
(β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = AB$.

10 (2-34396). Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB σε σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ σε σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- (α) $A\Delta = \Delta E$,
(β) $A\Delta = \Delta B$.

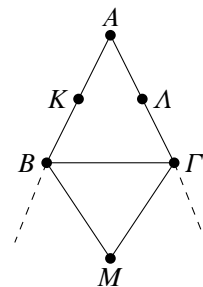
11 (2-34514). Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$,
 (β) το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές,
 (γ) η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



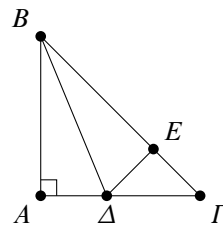
12 (2-34415). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και τα σημεία K και Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$,
 (β) $MK = M\Lambda$.



13 (2-36168). Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\hat{B}$. Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $A\Delta = \Delta E$,
 (β) $A\Delta < \Delta\Gamma$,
 (γ) $A\Gamma > AB$.



3.3 Τριγωνική ανισότητα (§3.12)

Θεώρημα (σελ. 60). Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

14 (Δ9). Να εξετάσετε αν κατασκευάζονται τρίγωνα με μήκη πλευρών τις τιμές των α , β , γ για τις περιπτώσεις του παρακάτω πίνακα:

α	β	γ
5	6	7
10	3	4
8	9	10
12	3	5

15 (Δ10). Αν δύο πλευρές τριγώνου έχουν μήκη 5 και 9:

- (α) δώστε ενδεικτικές τιμές για την τρίτη πλευρά,
 (β) βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το μήκος της τρίτης πλευράς.

16 (Δ11). Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία A , B εκτός αυτής. Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ευθείας, για το οποίο:

- (α) το άθροισμα $AM + BM$ γίνεται ελάχιστο και

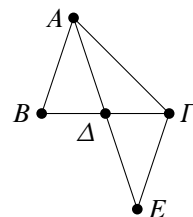
(β) η διαφορά $AM - MB$ γίνεται μέγιστη.

Να λύσετε το πρόβλημα στην περίπτωση που τα A και B βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας και στην περίπτωση που βρίσκονται προς την ίδια μεριά. Υπάρχει σημείο M ώστε το άθροισμα να γίνει μέγιστο; Αιτιολογήστε. Υπάρχει σημείο M ώστε η διαφορά να γίνει ελάχιστη; Αν ναι, ποιο;

17 (2-34502). Στο ακόλουθο σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $AB = \Gamma E$,

(β) $AE < AB + A\Gamma$.



18 (4-01749). Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε), δηλαδή η (ε) είναι μεσοκάθετος του AA' .

(α) Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

(i) Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}A'$.

(ii) Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).

(β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

(i) $KA = KA'$,

(ii) $KA + KB > AO + OB$.

4 Ο κύκλος

4.1 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (§3.14)

1 (Πόρισμα IV, σελ. 42). Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

2 (Πόρισμα III, IV σελ. 46). Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων (αντίστοιχα μεγαλύτερων) του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

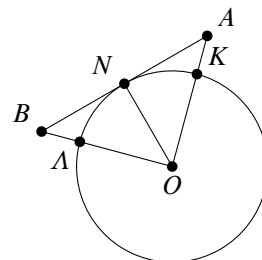
3 (Πόρισμα II, σελ. 50). Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

4 (Θεώρημα III, σελ. 51). Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα.

5 (2-13759). Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις: (i) $d = 3$. (ii) $d = 6$. (iii) $d = 9$.

6 (2-36344). Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές,
- (β) το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.



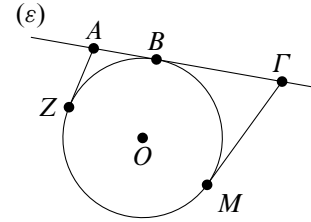
4.2 Εφαπτόμενα τμήματα (§3.15)

7 (Θεώρημα II, σελ. 68). Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

8 (Πόρισμα, σελ. 68). Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

- (α) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- (β) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

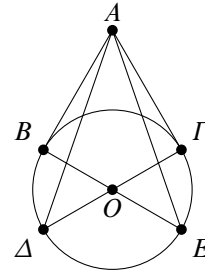
9 (2-13817). Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) . Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.



(α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.

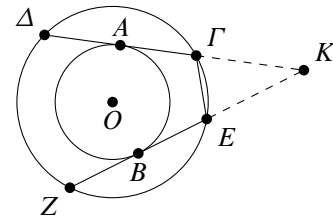
10 (2-36354). Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο A . Από το A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ του κύκλου και έστω E και Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



(α) τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα,

(β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

11 (2-36338). Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.



(α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

(β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

4.3 Σχετικές θέσεις δυο κύκλων (§3.16)

12 (Θεώρημα, σελ. 70). Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

13 (2-13758). Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν: (i) $K\Lambda = 13$, (ii) $K\Lambda = 2$, (iii) $K\Lambda = 5$, (iv) $K\Lambda = 11$, (v) $K\Lambda = 9$.

14 (2-13757). Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

(γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

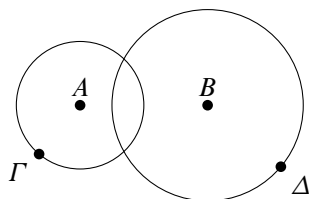
15 (2-12417). Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R = 3$, $r = 2$ και $K\Lambda = 4$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .
 (β) $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

16 (2-13835). Τα σημεία A , K και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

- (α) Να αποδείξετε ότι $1 < K\Lambda < 9$.
 (β) Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

17 (2-13836). Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.



- (α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$.
 (β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

5 Παράλληλες ευθείες (§4.2)

Θεώρημα (σελ. 80). *Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.*

Ιδιότητες παράλληλων ευθειών.

Πρόταση (I). *Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν*

- (α) *τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες,*
- (β) *τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,*
- (γ) *τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.*

Πρόταση (II). *Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.*

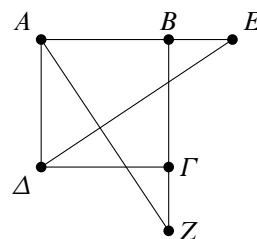
Πρόταση (III). *Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.*

Πόρισμα. *Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.*

Πρόταση (IV). *Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.*

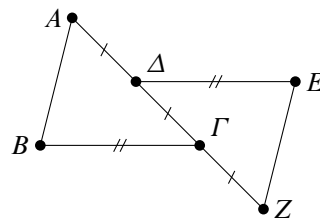
1 (2-34779). *Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και GA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι:*

- (α) *τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα,*
- (β) *$E\Delta // B\Gamma$.*



2 (2-36165). *Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:*

- (α) *τα τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ είναι ίσα,*
- (β) *οι γωνίες $E\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{Z}B$ είναι ίσες.*

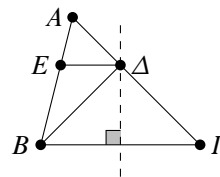


3 (2-13748). *Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:*

- (α) *Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.*
- (β) *$AB // EZ$.*

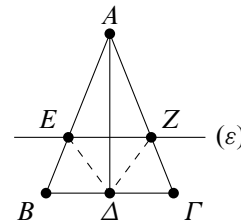
4 (2-13534). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ , και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
- (β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.



5 (2-34399). Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές,
- (β) τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.



6 (4-13843). Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

- (α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.
- (β) οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}x$ και $A\hat{B}y$ τέμνονται σε σημείο M .
- (γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .
- (δ) αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}x$ τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}y$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$.

7 (4-34335). Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

- (α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) ,
- (β) η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{M}x$ είναι κάθετη στη MO ,
- (γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{M}x$.

5.1 Άθροισμα γωνιών τριγώνου (§4.6)

1 (2-37013). Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

(α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

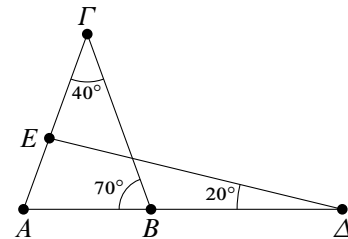
(β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

2 (2-37009). Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}E$.

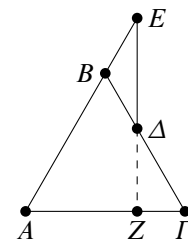
(γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.



3 (2-37014). Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

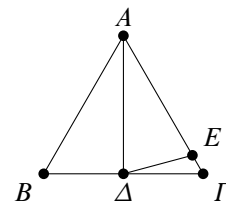
(β) η γωνία $A\hat{E}\Delta$ είναι ορθή.



4 (2-36228). Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

(β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

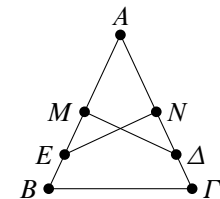


5 (2-36336). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

(β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

(γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.



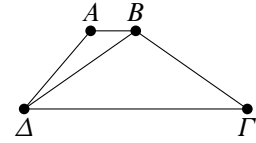
6 (2-36329). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν είναι $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$.

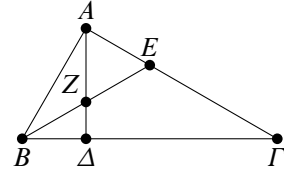
7 (2-36172). Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\widehat{B\Gamma\Delta} = 110^\circ$ και $\widehat{A\Delta B} = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

- (α) τη γωνία $\widehat{\Gamma}$,
(β) τη γωνία $\widehat{A}$.



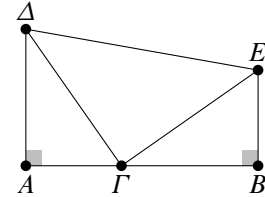
8 (2-36167). Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2\widehat{B}$ και $\widehat{A} = 3\widehat{\Gamma}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° .
(β) Αν το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.



9 (2-36163). Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.
(β) Αν η γωνία $E\widehat{\Gamma}B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

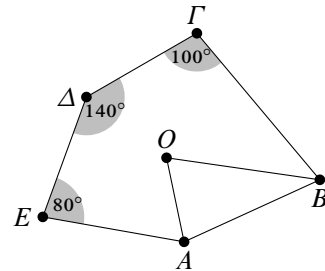


5.2 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου (§4.8)

- Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2n - 4$ ορθές.
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.

10 (2-12640). Στο κυρτό πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E$, οι διχοτόμοι των γωνιών του $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ τέμνονται στο O . Αν η γωνία του $\widehat{\Gamma}$ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του $\widehat{E}$ ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

- (α) το μέτρο του αθροίσματος $\widehat{A} + \widehat{B}$.
(β) το μέτρο της γωνίας $A\widehat{O}B$.



6 Παραλληλόγραμμα (§5.2–5.5)

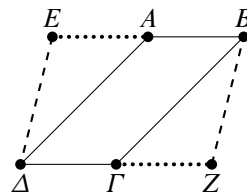
1 (2-37015). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα,
(β) $BM = \frac{AE}{2}$.

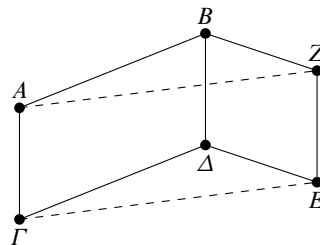
2 (2-37008). Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα,
(β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα.

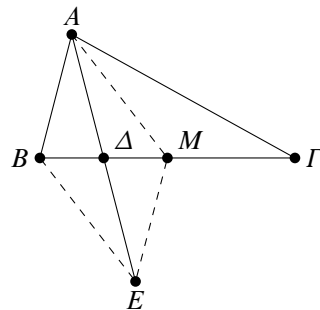
- 3** (2-36225). Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma H = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
 (α) τα τρίγωνα ΔDE και $B\Gamma H$ είναι ίσα,
 (β) το τετράπλευρο $EBH\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



- 4** (2-36327). Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$. Να αποδείξετε ότι:
 (α) το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο,
 (β) $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.



- 5** (2-36164). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:
 (α) το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο,
 (β) $ME = M\Gamma$.

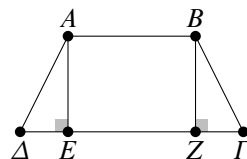


6.1 Ορθογώνιο (§5.3)

- 6** (2-36353). Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
 (α) οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες,
 (β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία A, Γ, B και Δ είναι ορθογώνιο.

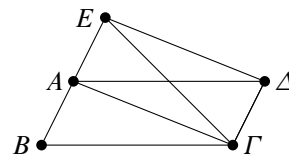
- 7** (2-34781). Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα μέσα M και N των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 (α) $M\Delta = M\Gamma$,
 (β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία M και N είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

- 8** (2-34491). Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ (με $AB \parallel \Gamma\Delta$). Από τα σημεία A και B φέρνουμε τα κάθετα τμήματα AE και BZ αντίστοιχα στη $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
 (α) $\Delta E = \Gamma Z$,
 (β) $AZ = BE$.



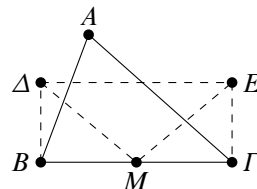
9 (2-36175). Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το σημείο A είναι μέσο του BE ,
- (β) το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές,
- (γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.



10 (2-36339). Στο σχήμα που ακολουθεί, το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, και τα τμήματα $B\Delta$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα στη $B\Gamma$ στα σημεία B, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα,
- (β) το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



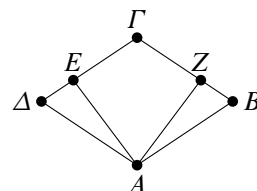
6.2 Ρόμβος (§5.4)

11 (2-34513). Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο,
- (β) το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

12 (2-34504). Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι τα τμήματα AZ και AE είναι κάθετα στις πλευρές $\Delta\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.
- (β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

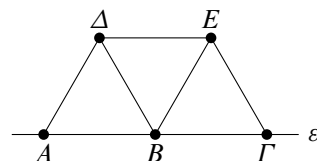


13 (2-34498). Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $B\Delta = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές,
- (β) το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

14 (2-13767). Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- (α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}E$.
- (β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- (γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι ρόμβος.



6.3 Τετράγωνο (§5.5)

15 (2-14883). Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του AG και BD .

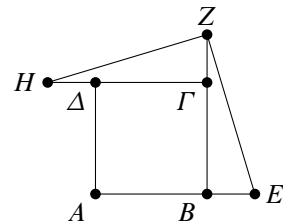
(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABGD$ είναι ορθογώνιο.

(β) Τι είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι AG και BD αν το $ABGD$ είναι τετράγωνο;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

16 (2-13536). Δίνεται τετράγωνο $ABGD$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , BG προς το G και GD προς το D θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = GZ = DH$.

(α) Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

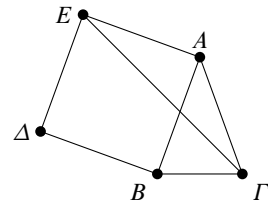
(β) Να αποδείξετε ότι $\angle EZH = 90^\circ$.



17 (2-36174). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $ABDE$. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο AGE είναι ισοσκελές,

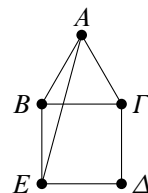
(β) $2 \cdot \angle EGA = 90^\circ - \angle BAG$.



18 (2-36173). Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABG και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $BGDE$.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες: (i) $\angle BEA$, (ii) $\angle BAE$.

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.



7 Εφαρμογές στα τρίγωνα (§5.6)

1 (2-37016). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $AF < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = AF$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AF$. Να αποδείξετε ότι:

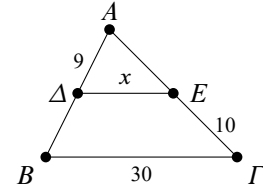
- (α) τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα μεταξύ τους,
 (β) η γωνία $E\hat{A}\Gamma$ είναι διπλασία της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$.

2 (2-36092). Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και AF αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

(α) Να υπολογίσετε:

- (i) το μήκος x του τμήματος ΔE ,
 (ii) την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

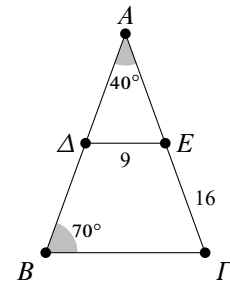


3 (2-36088). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και AF με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- (i) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του,
 (ii) $B\Gamma = 18$.

(β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

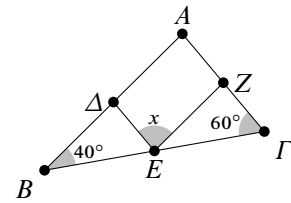


4 (2-34768). Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel AF$ και $ZE \parallel AB$.

(γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

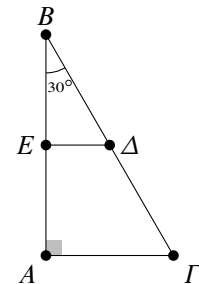


7.1 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου (§5.9)

5 (2-36342). Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

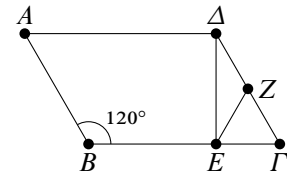
- (α) AF ,
 (β) $B\Gamma$,
 (γ) $A\Delta$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



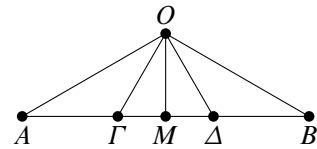
6 (2-37017). Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

- (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου.
 (β) Αν K είναι το μισό της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.
 (γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{Z}\Gamma$.



7 (4-37075). Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

- (α) Να αποδείξετε ότι:
 (i) η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι 60° ,
 (ii) οι γωνίες $O\hat{A}\Gamma, O\hat{B}\Delta$ είναι ίσες και κάθε μία ίση με 30° .
 (β) Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

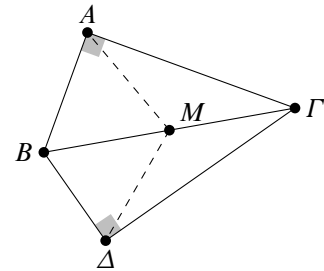


8 (4-34334). Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

- (α) $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$,
 (β) το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο,
 (γ) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

9 (4-34330). Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\Delta = 90^\circ$) με τις κορυφές τους A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$ και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές,
 (β) $A\hat{M}\Delta = 2\hat{\Gamma}\Delta$,
 (γ) τα A, B, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.



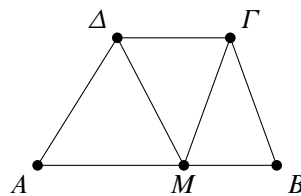
10 (4-01737). Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Ονομάζουμε Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής του τμήματος $H\Delta$ με την πλευρά AB και N είναι το σημείο τομής του HE με την πλευρά $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- (α) $AH = A\Delta = AE$.
 (β) Η γωνία $E\hat{H}\Delta$ είναι ορθή.
 (γ) Τα σημεία A, E και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$.

8 Τραπεζίιο (§5.10)

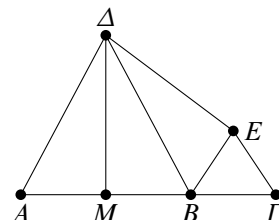
1 (4-01815). Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνιάς Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

- (α) Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.
- (β) Το τρίγωνο $M\beta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- (γ) Η ΓM είναι διχοτόμος της γωνιάς Γ του τραπέζιου.



2 (4-34320). Έστω A, B και Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta B$ και $B\epsilon\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τετράπλευρο $A\Delta E\beta$ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα $A\Delta$ και $B\epsilon$,
- (β) τα τρίγωνα $\Delta M\beta$ και $\Delta E\beta$ είναι ίσα,
- (γ) $\widehat{\Delta M\beta} + \widehat{\Delta E\beta} = 180^\circ$.



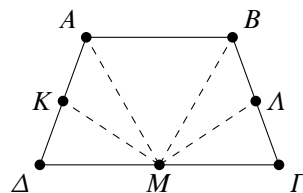
8.1 Ισοσκελές τραπέζιο (§5.11)

3 (2-37010). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ είναι τα ύψη του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$,

- (α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.
- (β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

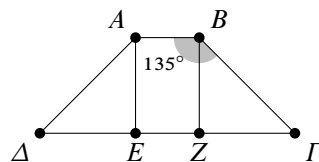
4 (2-36340). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$), το μέσο M της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα μέσα K και Λ των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα,
- (β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.



5 (2-36106). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\widehat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

- (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
- (β) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.



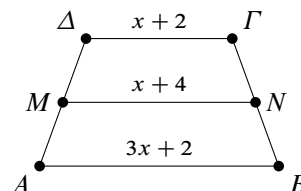
6 (2-34509). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- (α) $\Delta Z = \Gamma E$,
- (β) τα τρίγωνα $E\kappa Z$ και $\Delta\kappa\Gamma$ είναι ισοσκελή.

7 (2-34409). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$), με $AB > \Gamma\Delta$ και MN η διάμεσός του.

(α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραpezίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

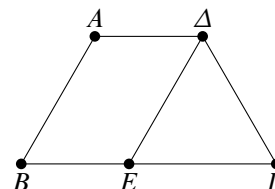
(β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.



8 (2-13497). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$.

(β) Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



9 (3-12418). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο ABE με βάση AB . Αν M είναι το μέσο της βάσης $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και BEG είναι ίσα.

(β) Η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.

10 (4-37089). Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές,

(β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα,

(γ) η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$,

(δ) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

11 (4-37135). Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

(β) $AE = BZ$.

(γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

