

Περιεχόμενα

1	Πιθανότητες	2
1.1	Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα	2
1.2	Πιθανότητες: Ορισμοί και εφαρμογές	2
1.3	Πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα	5
1.4	Συνδυαστική & Πιθανότητες	11
2	Στατιστική	12
2.1	Πληθυσμός - Δείγμα – Μεταβλητές	12
2.2	Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων	13
2.3	Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, θηκόγραμμα, συντελεστής μετα- βλητότητας	13
2.4	Κανονική κατανομή και εφαρμογές	13
2.5	Πίνακες Συνάφειας και Ραβδογράμματα	13
2.6	Σύγκριση ποσοτικών χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού	13
2.7	Γραμμική συσχέτιση ποσοτικών μεταβλητών και διαγράμματα διασποράς	13

1 Πιθανότητες

1.1 Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα

1.2 Πιθανότητες: Ορισμοί και εφαρμογές

1 (2-27230). Σε ένα κουτί υπάρχουν συνολικά 25 σοκολατάκια από τα οποία 12 σοκολατάκια περιέχουν μόνο αμύγδαλο, 8 σοκολατάκια μόνο φουντούκι και 5 σοκολατάκια μόνο κεράσι.

(α) Επιλέγουμε τυχαία ένα σοκολατάκι από το κουτί. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το σοκολατάκι αυτό:

- (i) να περιέχει αμύγδαλο,
- (ii) να μην περιέχει φουντούκι,
- (iii) να περιέχει αμύγδαλο ή φουντούκι.

(β) Από το κουτί φάγαμε 3 σοκολατάκια με αμύγδαλο και 2 σοκολατάκια με φουντούκι. Αν στη συνέχεια, επιλέξουμε τυχαία ένα σοκολατάκι από το κουτί, να υπολογίσετε την πιθανότητα το σοκολατάκι αυτό να περιέχει κεράσι.

2 (2-27449). Η Μαρία υιοθέτησε μία γατούλα που ερχόταν συνέχεια στην αυλή του σπιτιού της και την ονόμασε Μελιώ. Μετά από δύο εβδομάδες που την είχε στο σπίτι διαπίστωσε ότι η Μελιώ είναι έγκυος. Την πήγε στον κτηνίατρο μαζί με τη μητέρα της και ο κτηνίατρος τους είπε ότι η Μελιώ θα γεννήσει 4 γατάκια.

(α) Να γράψετε χρησιμοποιώντας δένδροδιάγραμμα ένα δειγματικό χώρο για τις δυνατές περιπτώσεις του φύλου των τεσσάρων γατιών με τη σειρά γέννησής τους.

(β) Μία φίλη της Μαρίας υποσχέθηκε ότι αφού γεννηθούν και απογαλακτιστούν τα γατάκια από τη μαμά τους, θα υιοθετήσει τα τρία πρώτα γατάκια που θα γεννηθούν, αν είναι ίδιου φύλου. Ένας γείτονας της Μαρίας υποσχέθηκε να υιοθετήσει το 4ο γατάκι αν είναι θηλυκό, γιατί έχει ήδη μία θηλυκή γατούλα στο σπίτι του.

- (i) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων του το ενδεχόμενο A: «Τα τρία πρώτα γατάκια είναι ίδιου φύλου και το τέταρτο γατάκι είναι θηλυκό».
- (ii) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «Υιοθετούνται και τα τέσσερα γατάκια».

3 (2-27187). Από τους 100 μαθητές, που είναι παρόντες σήμερα στο σχολείο, μπλε στυλό έχουν 87. Από αυτούς, 17 μαθητές έχουν και μπλε και μαύρο στυλό. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή από τους 100.

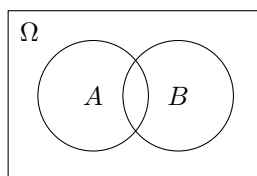
(α) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε στυλό είναι ίση με 0,87.

(β) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε και μαύρο στυλό, είναι ίση με 0,17.

- (γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε και να μην έχει μαύρο στυλό.

4 (2-27186). Από τις 80 μαθήτριες, που είναι παρούσες σήμερα στο σχολείο, πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών έχουν 60. Από τις 60 μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών, οι 15 έχουν επιπλέον και πτυχίο καλής γνώσης γαλλικών. Επιλέγουμε τυχαία μία μαθήτρια από τις 80.

- (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η μαθήτρια που επιλέξαμε να έχει πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών.
- (β) Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το Ω περιέχει τις 80 μαθήτριες, το A περιέχει τις μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών και το B περιέχει τις μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης γαλλικών.



- (i) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το διάγραμμα Venn. Στη συνέχεια να χρωματίσετε με το στυλό σας το μέρος του διαγράμματος Venn που περιέχει τις μαθήτριες, οι οποίες έχουν και τα δύο πτυχία: καλής γνώσης αγγλικών και γαλλικών.
- (ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου “η μαθήτρια που επιλέξαμε έχει και τα δύο πτυχία: καλής γνώσης αγγλικών και γαλλικών”.
- 5** (4-36478). Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα, 26 κόκκινα και 26 μαύρα. Τα κόκκινα φύλλα χωρίζονται σε δυο φυλές, τις κούπες και τα καρό, και τα μαύρα επίσης σε δύο, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από:

- εννέα αριθμούς: 2, 3, . . . , 10
- τρεις φιγούρες: βαλές, ντάμα, ρήγας
- έναν άσο.

- (α) Η Μαρία τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια τράπουλα. Να βρείτε τις πιθανότητες:
- (i) το φύλλο να είναι η ντάμα κούπα,
- (ii) το φύλλο να είναι κόκκινο και φιγούρα.
- (β) Η Μαρία αφαίρεσε από την αρχική τράπουλα τα φύλλα με τους αριθμούς και τράβηξε τυχαία ένα φύλλο. Πόσες φορές αυξήθηκαν οι πιθανότητες του προηγούμενου ερωτήματος;

6 (4-27129). Σε ένα σχολείο στη Γ' Λυκείου φοιτούν 100 μαθητές. Στην τάξη αυτή δεν υπάρχουν αδέρφια, οπότε οι 100 μαθητές αντιστοιχούν σε 100 διαφορετικές οικογένειες. Ρωτήσαμε τους 100 μαθητές το πλήθος των παιδιών της οικογένειάς τους. Από τις απαντήσεις τους προέκυψε ότι οι οικογένειες των μαθητών έχουν το πολύ τέσσερα παιδιά. Συγκεκριμένα, οι 56 οικογένειες έχουν δύο παιδιά, 20 οικογένειες έχουν τρία παιδιά, 8 οικογένειες έχουν τέσσερα παιδιά και οι υπόλοιπες έχουν ένα παιδί.

- (α) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια από τις παραπάνω οικογένειες των μαθητών, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου :
- (i) «Η οικογένεια του μαθητή έχει τέσσερα παιδιά».
 - (ii) «Η οικογένεια του μαθητή έχει λιγότερα από τρία παιδιά».
- (β) Στην γιορτή αποφοίτησης συμμετείχαν όλοι οι μαθητές της Γ' Λυκείου με τις οικογένειές τους. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από τα παρευρισκόμενα παιδιά, ποια είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τέσσερα παιδιά;
- (γ) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα α) i. και β) και στην περίπτωση που είναι διαφορετικές να δικαιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό.

7 (4-27130). Θεωρούμε τις οικογένειες που είναι δυνατό να σχηματιστούν με τρία παιδιά. Εξετάζουμε τα παιδιά των οικογενειών αυτών ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους. Για παράδειγμα η τριάδα (α, κ, α) αντιστοιχεί σε οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι και τρίτο παιδί αγόρι.

- (α) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα :
- Α: «Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι κορίτσι».
 - Β: «Και τα τρία παιδιά είναι ίδιου φύλου».
 - Γ: «Το φύλο του δεύτερου παιδιού είναι διαφορετικό από το φύλο του πρώτου και του τρίτου παιδιού».
- (β) Αν μία οικογένεια αποκτήσει τρία παιδιά :
- (i) Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο παιδί της οικογένειας να είναι κορίτσι;
 - (ii) Ποια είναι η πιθανότητα και τα τρία παιδιά της οικογένειας να είναι ίδιου φύλου;
 - (iii) Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το ενδεχόμενο Γ έχει ίδια πιθανότητα να συμβεί με το ενδεχόμενο να φέρει κάποιος 2 φορές κεφαλή αν στρίψει δυο φορές ένα αμερόληπτο κέρμα. Συμφωνείτε με την άποψή του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

8 (4-27323). Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη ενός μεροληπτικού ζαριού» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Δίνεται ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1» είναι $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ και ότι τα ενδεχόμενα $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ και $\{6\}$ είναι ισοπίθανα.

- (α) Να αποδείξετε ότι $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{10}$.

(β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- (i) A: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1 ή 5»
- (ii) B: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός».

(γ) Έστω ένα δεύτερο πείραμα τύχης «ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού» με τον ίδιο δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Να βρείτε για το δεύτερο πείραμα τύχης τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B του ερωτήματος β) και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους.

1.3 Πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα

1 (1-36841). (α) Έστω ένα πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα. Με $P(A)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A που περιέχει κ τέτοια αποτελέσματα. Να αντιγράψετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση: «Η πιθανότητα του ενδεχομένου A, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, είναι ίση με ...».

(β) Έστω A ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω . Αν A' είναι το συμπληρωματικό ή αντίθετο ενδεχόμενο του A:

- (i) Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα Venn στο οποίο να φαίνονται τα A και A' .
- (ii) Να εξηγήσετε, με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn, γιατί ισχύει $A \cup A' = \Omega$.
- (iii) Να εξηγήσετε, γιατί τα A και A' είναι ασυμβίβαστα.
- (iv) Να αποδείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$, όπου $P(A)$ και $P(A')$ είναι οι πιθανότητες των A και A' , αντίστοιχα.

2 (2-27312). Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο κέρμα τρεις φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα.

(α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε έναν δειγματικό χώρο και το ενδεχόμενο A: «Το αποτέλεσμα των τριών ρίψεων είναι τουλάχιστον δύο φορές κεφαλή».

(β) Να γράψετε το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A' του A.

(γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και A' .

3 (2-27313). Ο Κώστας και ο Νίκος έχουν ο καθένας ένα συνηθισμένο ζάρι και παίζουν το εξής παιχνίδι: Ρίχνει ο καθένας το δικό του ζάρι και καταγράφουν το αποτέλεσμα. Αν και οι δύο αριθμοί που φέρνουν ο Κώστας και ο Νίκος, είναι μεγαλύτεροι από το 2, τότε κερδίζει ο Κώστας. Διαφορετικά κερδίζει ο Νίκος.

(α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο, όπου για παράδειγμα, το αποτέλεσμα (2, 5) να σημαίνει ότι ο Κώστας έφερε 2 και ο Νίκος 5.

(β) Να βρείτε τις πιθανότητες:

- (i) να κερδίσει ο Κώστας,

- (ii) να κερδίσει ο Νίκος.

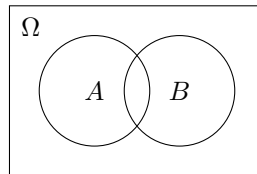
4 (2-27316). Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από 13 φύλλα: τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, τις φιγούρες βαλέ (J), ντάμα (Q), ρήγα (K) και τον άσο (A). Η Άννα τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα. Έστω τα ενδεχόμενα A : «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός» και M : «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι μπαστούνι».

(α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα $A \cap M$ και $A \cup M$.

(β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- (i) A , M και $A \cap M$,
(ii) $A \cup M$.

5 (2-27450). Ρωτήθηκαν 100 άτομα για το μέσο ή τα μέσα μεταφοράς που χρησιμοποίησαν στις διακοπές τους το περσινό καλοκαίρι. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το A έχει ως στοιχεία τα άτομα που χρησιμοποίησαν πλοίο και το B εκείνους που χρησιμοποίησαν αεροπλάνο. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από τα παραπάνω.



(α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.), να εκφράσετε τα ενδεχόμενα για το άτομο που επιλέγουμε:

- (i) Χρησιμοποίησε πλοίο και αεροπλάνο.
(ii) Χρησιμοποίησε μόνο αεροπλάνο.

(β) Από τα 100 άτομα που ρωτήθηκαν, 75 άτομα απάντησαν ότι ταξίδεψαν με πλοίο, 35 άτομα ότι ταξίδεψαν με αεροπλάνο και 20 άτομα ταξίδεψαν και με τα δύο μεταφορικά μέσα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

- E_1 : «Το άτομο που επιλέγουμε χρησιμοποίησε ένα τουλάχιστον από τα δύο μέσα».
- E_2 : «Το άτομο που επιλέγουμε έχει ταξιδέψει μόνο με αεροπλάνο».

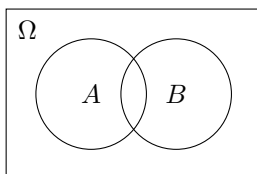
6 (2-28853). Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A , B δύο ενδεχόμενά του.

(α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.), να εκφράσετε τα ενδεχόμενα:

- (i) Πραγματοποιείται το A και το B .

(ii) Πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A .

Μπορείτε αν θέλετε να απαντήσετε χρησιμοποιώντας το παρακάτω διάγραμμα Venn, σκιάζοντας κάθε φορά το μέρος εκείνο που αναφέρεται στο ζητούμενο ενδεχόμενο.



(β) Θεωρούμε το πείραμα τύχης: «Ρίψη ενός νομίσματος δύο φορές» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{KK, KT, TK, TT\}$ και τα ενδεχόμενα A και B που ορίζονται ως εξής:

- A : «Στην 1η ρίψη φέρουμε κεφαλή (K)»,
- B : «Φέρουμε διαφορετική ένδειξη και στις 2 ρίψεις».

(i) Να γράψετε τα στοιχεία των ενδεχομένων A και B .

(ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων του ερωτήματος α).

7 (2-36469). Σ' ένα δείγμα 3000 φορολογούμενων πολιτών, οι 600 έχουν ελεγχθεί από την Ανεξάρτητη Αρχή Δημοσίων Εσόδων (ΑΑΔΕ) τουλάχιστον μία φορά κατά το παρελθόν. Κατά το τρέχον έτος, η ΑΑΔΕ επιλέγει για έλεγχο, τυχαία, έναν από τους παραπάνω 3000 φορολογούμενους. Έστω το ενδεχόμενο, A : «ο φορολογούμενος έχει ελεγχθεί τουλάχιστον μία φορά κατά το παρελθόν» και το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A' του A .

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A .

(β) Να διατυπώσετε λεκτικά το ενδεχόμενο A' .

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A' .

8 (2-29952). Σε ένα σχολείο φοιτούν 120 μαθητές στη Γ Λυκείου και όλοι προετοιμάζονται να διαγωνιστούν στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Κάποιοι από τους μαθητές αυτούς, επιλέγουν να διαγωνιστούν και σε αθλήματα ή Αγγλικά. Συγκεκριμένα, 40 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα, 15 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και στα Αγγλικά, ενώ 10 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα και στα Αγγλικά. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους 120 μαθητές και θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

- A : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα αθλήματα» και
- Γ : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα Αγγλικά»

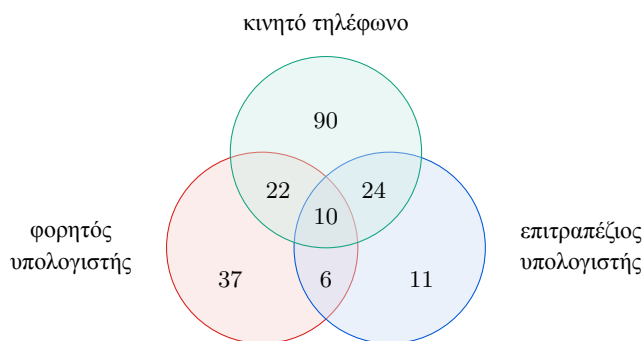
- (α) Να πείτε πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$ και να βρείτε την πιθανότητα του.
- (β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής διαγωνίζεται μόνο στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού».

9 (2-31508). Από σχετική μελέτη γνωρίζουμε ότι το 50% των εργαζομένων μιας πόλης για την μετάβασή τους στην εργασία τους χρησιμοποιούν κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς, το 40% χρησιμοποιούν κάποιο ιδιωτικό μέσο μεταφοράς και 15% χρησιμοποιούν και κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς και ιδιωτικό μέσο μεταφοράς. Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο αυτής της πόλης. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μεταβαίνει στην εργασία του :

- (α) Με κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς ή με ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.
- (β) Να μην χρησιμοποιεί μέσο μαζικής ούτε ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.

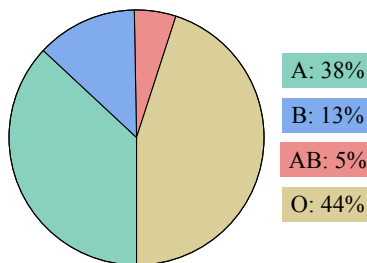
10 (4-36380). Σε μία έρευνα συμμετείχαν 200 άτομα, τα οποία συνδέθηκαν τουλάχιστον μία φορά την προηγούμενη εβδομάδα στο διαδίκτυο. Η ερώτηση της έρευνας αφορούσε τη συσκευή ή τις συσκευές με τις οποίες συνδέθηκαν. Το παρακάτω διάγραμμα Venn για τα άτομα που συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο, με φορητό υπολογιστή ή με επιτραπέζιο υπολογιστή δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας.

- (α) Πόσα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:
- συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο,
 - συνδέθηκαν μόνο με κινητό τηλέφωνο,
 - συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο αλλά όχι με επιτραπέζιο υπολογιστή;
- (β) Ένα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο αυτό κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:
- να συνδέθηκε με κινητό τηλέφωνο,
 - να συνδέθηκε τουλάχιστον με δύο τρόπους,
 - να συνδέθηκε ακριβώς με έναν από τους τρεις τρόπους.



11 (4-36379). Κάθε άνθρωπος ανήκει σε μία μόνο, από τις τέσσερις κύριες ομάδες αίματος O, A, B ή AB. Είναι γνωστό ότι η ομάδα O μπορεί να δώσει αίμα σε όλες τις ομάδες (O, A, B και AB). Η ομάδα A μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις A και AB. Η ομάδα B μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις B και AB. Τέλος, η ομάδα AB μπορεί να δώσει αίμα μόνο στην AB. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η ποσοστιαία κατανομή των ομάδων αίματος σε μία πόλη. Ένα άτομο από αυτή την πόλη, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα, αυτό να μπορεί:

- (α) να δώσει αίμα σε οποιοδήποτε άτομο,
- (β) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A,
- (γ) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A ή σ' ένα που ανήκει στην ομάδα B,
- (δ) να δεχθεί αίμα από ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα B,
- (ε) να δεχθεί αίμα από οποιοδήποτε άτομο.



12 (4-29954). Σε ένα σχολείο φοιτούν 600 μαθητές. Οι γυμναστές του σχολείου ανά μήνα προσπαθούν να εξοικειώνουν τους μαθητές τους με διαφορετικές αθλητικές δραστηριότητες. Ο μήνας Φεβρουάριος είναι αφιερωμένος στη Γιόγκα και το Χορό. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να επιλέξει τουλάχιστον μια από τις δραστηριότητες Χορό ή Γιόγκα. 420 μαθητές επέλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν με Γιόγκα και 330 με Χορό. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του σχολείου. Ονομάζουμε Γ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Γιόγκα» και X το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Χορό».

- (α) (i) Υπάρχουν μαθητές του σχολείου που διάλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν και με τις δύο δραστηριότητες (Χορό και Γιόγκα);
- (ii) Είναι τα ενδεχόμενα Γ και X ασυμβίβαστα;
- (β) Τα ενδεχόμενα: «ο μαθητής επιλέγει μόνο Χορό» και «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» είναι ασυμβίβαστα;
- (γ) (i) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» ισούται με $270/600$.
- (ii) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο μια από τις προτεινόμενες αθλητικές δραστηριότητες του μήνα».

13 (4-28856). Σε ένα εκπτωτικό κατάστημα, ένας πελάτης θέλει να αγοράσει ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν. Τα διαθέσιμα μεγέθη και για τα δύο είδη είναι μικρό (s), μεσαίο

(m), και μεγάλο (L). Τα σωστά μεγέθη που φοράει ο πελάτης είναι: για το πουκάμισο m , ενώ για το μπουφάν L . Ο πελάτης επιλέγει τυχαία ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν χωρίς να κοιτάζει τα μεγέθη τους.

(α) Να γραφεί κατάλληλος δειγματικός χώρος που να περιέχει όλες τις δυνατές επιλογές για το μέγεθος των δύο ειδών (πουκάμισο, μπουφάν).

(β) Να βρεθούν οι πιθανότητες:

- (i) ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο,
- (ii) ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν,
- (iii) ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για *τουλάχιστον* ένα από τα δύο είδη,
- (iv) ο πελάτης *δεν* επέλεξε το σωστό μέγεθος σε *κανένα* από τα δύο είδη.

14 (4-27349). Σ' ένα διαγώνισμα δύο ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, με τέσσερις δυνατές απαντήσεις η καθεμία τις α, β, γ και δ . Η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ . Ένας μαθητής επιλέγει τυχαία την απάντηση για καθεμία από τις δύο ερωτήσεις.

(α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις.

(β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- (i) ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση,
- (ii) ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση,
- (iii) ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις,
- (iv) ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις.

15 (4-27454). Ένα μη αμερόληπτο ζάρι με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι φτιαγμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα του απλού ενδεχομένου $\{6\}$ να είναι ίση με $1/3$. Για τις άλλες 5 έδρες ισχύουν τα εξής: τα απλά ενδεχόμενα $\{1\}, \{3\}, \{5\}$ είναι ισοπίθανα και η πιθανότητα του ενδεχομένου $= \{1, 3, 5\}$ είναι ίση με $1/6$. Τα απλά ενδεχόμενα $\{2\}$ και $\{4\}$ είναι επίσης ισοπίθανα.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- (i) $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{18}$,
- (ii) $P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$.

(β) Σε μία τυχαία ρίψη του ζαριού, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

- (i) A : «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός»
- (ii) B : «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 3 ή 4»

(γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B του ερωτήματος (β) (ii) και να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

1.4 Συνδυαστική & Πιθανότητες

1 (2-29955). Ένα τμήμα της Α Λυκείου έχει εβδομαδιαίο πρόγραμμα μαθημάτων που αποτελείται από επτάωρα στις 5 εργάσιμες μέρες της εβδομάδας.

- (α) Αν πρόκειται να επιλέξουμε μια μέρα μιας συγκεκριμένης εβδομάδας και μια διδακτική ώρα για να γίνει η συνέλευση του τμήματος, πόσες είναι οι διαφορετικές δυνατές επιλογές;
- (β) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια διδακτική ώρα για να γίνει η συνέλευση του τμήματος ποια είναι η πιθανότητα η συνέλευση να γίνει μια έβδομη διδακτική ώρα της συγκεκριμένης εβδομάδας;

2 (2-29953). Ο διευθυντής του σχολείου έχει κανονίσει συνάντηση με τα 5-μελή συμβούλια των μαθητικών κοινοτήτων στη βιβλιοθήκη του σχολείου. Στη βιβλιοθήκη υπάρχουν 5 καρέκλες η μία δίπλα στην άλλη, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές. Για να μη ρωτάει κάθε φορά ποιος από τους μαθητές έχει εκλεγεί πρόεδρος, ζήτησε να κάθεται στην πρώτη από αριστερά καρέκλα ο πρόεδρος και στις υπόλοιπες οι άλλοι μαθητές του 5-μελούς συμβουλίου.

- (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στη συνάντηση με το διευθυντή;
- (β) Να βρείτε την πιθανότητα η τοποθέτηση του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στις πέντε καρέκλες να είναι: «ο πρόεδρος στην πρώτη καρέκλα, τα δύο άλλα μέλη του προεδρείου (γραμματέας – ταμίας) στις δύο επόμενες από αριστερά καρέκλες, και στη συνέχεια στις δύο επόμενες θέσεις τα δύο μέλη του μαθητικού συμβουλίου».

3 (2-29951). Ο διευθυντής του σχολείου έχει κανονίσει συνάντηση με τα 5-μελή συμβούλια των μαθητικών κοινοτήτων στη βιβλιοθήκη του σχολείου. Στη βιβλιοθήκη υπάρχουν 6 καρέκλες η μία δίπλα στην άλλη στις οποίες θα καθίσουν οι 5 μαθητές του συμβουλίου.

- (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στη συνάντηση με το διευθυντή;
- (β) Να βρείτε την πιθανότητα στη συνάντηση του 5-μελούς με το διευθυντή ο πρόεδρος και ο γραμματέας να καθίσουν στις δύο ακραίες καρέκλες.

2 Στατιστική

2.1 Πληθυσμός - Δείγμα – Μεταβλητές

1 (2-36760). Έγινε μια έρευνα με στόχο να μελετηθούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των 33.495 ατόμων με ηλικίες από τα 40 έως τα 49 έτη, μιας συγκεκριμένης περιφέρειας της Ελλάδας. Η εταιρεία που έκανε την έρευνα, δεν ήταν δυνατόν να συλλέξει στοιχεία από όλους τους/τις κατοίκους της συγκεκριμένης περιφέρειας ηλικίας 40 έως 49. Έτσι, συνέλεξε στοιχεία από ένα δείγμα 1.000 από αυτά τα 33.495 άτομα, αντιπροσωπευτικό των 33.495 ατόμων. Τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν:

- Η ηλικία τους (σε έτη),
- αν εργάζονταν (ναι ή όχι),
- ο πιο πρόσφατος τίτλος σπουδών που είχαν (απολυτήριο γυμνασίου, λυκείου, κτλ.),
- το επάγγελμά τους (αν εργάζονταν),
- πόσα έτη είχαν εργαστεί στο παρελθόν,
- ο χρόνος που έκαναν για να φτάσουν στην εργασίας τους, σε λεπτά (αν εργάζονταν),
- η οικογενειακή τους κατάσταση (άγαμοι-άγαμες, έγγαμοι-έγγαμες, κτλ.).

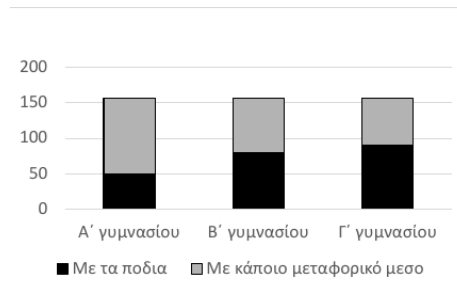
Ανάμεσα στα ευρήματα της έρευνας καταγράφηκαν τα εξής:

- Η επικρατούσα τιμή, όσο αφορά την ηλικία τους ήταν τα 46 έτη.
- Οι έγγαμοι-έγγαμες ήταν 623.
- Στην ερώτηση αν εργάζονταν, όλοι/-ες απάντησαν με «ναι» ή «όχι». Το 8% απάντησαν «όχι».

- (α) Ποιο ήταν το μέγεθος του πληθυσμού της έρευνας και ποιο του δείγματος που επέλεξε η εταιρεία;
- (β) Ποια από τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν ποσοτικά και ποια ποιοτικά;
- (γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.
- (i) Η ηλικία, σε έτη, στην οποία βρίσκονται περισσότερα άτομα του δείγματος από όλες τις άλλες ηλικίες ήταν 46.
 - (ii) Από τα ευρήματα στο δείγμα μπορούμε να συμπεράνουμε με ασφάλεια ότι η επικρατούσα τιμή της ηλικίας, σε έτη, όλων των κατοίκων της περιφέρειας ήταν 46.
 - (iii) Το 92% των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα απάντησαν ότι εργάζονταν.

- (iv) Έχουμε ενδείξεις ότι, από όλους/-ες τους/τις κατοίκους της περιφέρειας με ηλικίες από τα 40 έως τα 49 έτη, οι περισσότεροι/-ες ήταν έγγαμοι-έγγαμες.

2 (2-36766). Σε ένα γυμνάσιο στο κέντρο της Αθήνας, για μια έρευνα, όλα τα παιδιά κάθε τάξης απάντησαν στο εξής: «Πώς έρχεστε συνήθως το πρωί στο σχολείο; Με τα πόδια ή με κάποιο μεταφορικό μέσο;» Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα.



Δίνεται ότι κάθε τάξη έχει 156 παιδιά.

- (α) Σε ποια από τις τρεις τάξεις του γυμνασίου απάντησαν τα λιγότερα παιδιά ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια;
- (β) Δίνεται επιπλέον ότι τα παιδιά της Β' τάξης που απάντησαν «με τα πόδια» ήταν 80, ενώ τα παιδιά της Γ' τάξης που έδωσαν την ίδια απάντηση ήταν 90:
- (i) Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας.

έρχονται στο σχολείο	Β' τάξη	Γ' τάξη
με τα πόδια		
με κάποιο μεταφορικό μέσο		

- (ii) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί που φοιτά στη Β' τάξη του σχολείου. Ποια είναι η πιθανότητα να απάντησε ότι έρχεται στο σχολείο με μεταφορικό μέσο;

2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

2.3 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, θηκόγραμμα, συντελεστής μεταβλητότητας

2.4 Κανονική κατανομή και εφαρμογές

2.5 Πίνακες Συνάφειας και Ραβδογράμματα

2.6 Σύγκριση ποσοτικών χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού

2.7 Γραμμική συσχέτιση ποσοτικών μεταβλητών και διαγράμματα διασποράς