

Ασκήσεις Άλγεβρας

Α Λυκείου

Νικόλαος Τόμης

ΔΙΑΠΟΛ 2023-24

Περιεχόμενα

2	Οι Πραγματικοί Αριθμοί	2
2.1	Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους	2
2.2	Διάταξη Πραγματικών Αριθμών	4
2.3	Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού	6
2.4	Ρίζες Πραγματικών Αριθμών	10
3	Εξισώσεις	12
3.1	Εξισώσεις 1ου Βαθμού	12
3.2	Η Εξίσωση $x^n = a$	13
3.3	Εξισώσεις 2ου Βαθμού	14
4	Ανισώσεις	18
4.1	Ανισώσεις 1ου Βαθμού	18
4.2	Ανισώσεις 2ου Βαθμού	20
5	Πρόοδοι	25
5.2	Αριθμητική Πρόοδος	25
5.3	Γεωμετρική Πρόοδος	26
6	Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων	29
6.1	Η Έννοια της Συνάρτησης	29
6.2	Γραφική Παράσταση Συνάρτησης	32
6.3	Η Συνάρτηση $f(x) = ax + b$	35
A	Το 1ο Θέμα	38
A.1	Θεωρία	38
A.2	Σωστό ή Λάθος;	40
A.3	Θέματα τράπεζας	42
B	Προβλήματα	44

2 Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

1. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{2x-2}{x-1}, \quad \frac{x^2-1}{x+1}, \quad \frac{3x^2-9x}{x-3}, \quad \frac{2x^2-8}{2x^2-4x}.$$

2 (2-13053). Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι

(i) $\beta + \gamma = -\alpha$.

(ii) $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} = -\alpha$.

(β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} = 0$$

3 (2-13323). (α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

(β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

4 (2-36884). (α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

(β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

5 (2-14555). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x-2y)^2 - 2(3-2xy) = 5y^2 - 1.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x+y)^3(x-y)^3$.

6 (2-14458). Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y) = 9xy.$$

(α) Να αποδείξετε ότι (i) $(2y-x)^2 = 0$ και (ii) $y = \frac{x}{2}$.

(β) Να αποδείξετε ότι

$$\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2.$$

7 (2-14473). Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

$$\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $y = 2x$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}.$$

8 (2-35388). Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}.$$

9 (2-13472). Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

(α) Να αποδείξετε ότι: (i) $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$, (ii) $\alpha + \beta = 1$.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

10 (2-14489). Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

(α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

11 (2-13088). Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε:

$$A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

12 (2-12685). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4,$$

τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$.

(β) $\alpha = \beta$.

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

1 (2-37179). Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

(β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

2 (2-12673). Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

3 (2-36899). Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$,

(β) $(\alpha + \frac{4}{\alpha})(\beta + \frac{4}{\beta}) \geq 16$.

4 (2-14704). Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $x + y$,

(β) $2x - 3y$,

(γ) $\frac{x}{y}$.

5 (2-14492). Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε

(α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

6 (2-14475). Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

(α) $\alpha + 2\beta$,

(β) $\alpha - \beta$.

7 (2-35040). Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

(γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8 (2-13266). Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(β) Να δείξετε ότι

(i) $A + B \geq 0$.

(ii) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

9 (2-12922). Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

10 (3-14602). Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

(α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

(β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$$

11 (3-14713). Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

(β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

(i) $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$.

(ii) $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

12. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

(α) $y - x$,

(β) $x^2 + y^2$.

13. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

(α) $\alpha - 2\beta$,

(β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$.

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

1. Αν $\alpha > \beta$, να γράψετε τις ακόλουθες παραστάσεις χωρίς τις απόλυτες τιμές:

$$|\alpha - \beta|, \quad |\beta - \alpha|, \quad -|\beta - \alpha|.$$

2. Αν $\alpha > \beta > \gamma$, να γράψετε την ακόλουθη παράσταση χωρίς τις απόλυτες τιμές:

$$3|\alpha - \beta| - 2|\gamma - \alpha| - 3|\beta - \gamma|.$$

3. Αν ισχύει $2 < x < 3$, να δείξετε ότι

$$-2|x - 3| + |6 - 2x| - 4|x - 2| + |8 - 4x| = 0.$$

4. Αν δείξετε ότι

$$|\alpha - 2\beta| + |2\alpha - 4\beta| - |6\beta - 3\alpha| = 0 \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

5 (2-13177). Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

(α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

(γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράσταση $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

6 (2-15054). Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $= \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

7 (2-35112). Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

(α) Να αποδείξετε ότι:

(i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$,

(ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

(β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4.$$

8 (2-35412). Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

(α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$$

9 (2-14412). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς, α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

(α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$.

(β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

10 (2-35415). Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

(α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $A = 2x - 3$.

(β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

11 (2-37201). Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $A = x - y + 2$.

(β) $0 < A < 4$.

12 (2-35041). Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

(α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

13 (2-36894). (α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι $|\alpha| + |\frac{1}{\alpha}| \geq 2$.

14 (2-36898). (α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι $|\frac{\alpha}{\beta}| + |\frac{\beta}{\alpha}| \geq 2$ (1).

(β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η έννοια της απόστασης

15 (2-14572). Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$. Να δείξετε ότι:

(α) $-3 < x < -1$,

(β) $|2x + 4| < 2$.

16 (2-14617). Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

17 (2-35404). (α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

(β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να δείξετε ότι $3 < x + y < 7$.

18 (2-14491). (α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$.

(β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

19 (2-35043). Δίνονται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$.

20 (2-35044). Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y+1|+|y-3|}{2}$.

21 (2-37200). Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x + 1| < 2$,

(α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$.

(β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

22 (4-36672). Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

(α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων

(i) $|x + 2|$,

(ii) $|x - 7|$.

(β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|.$$

(γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.

(δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

23 (4-36671). Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση $d(x, 5) \leq 9$.

(α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

(γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

(δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18$$

Παλαιότερα Θέματα

24. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

(α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

25. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $|2x - 1| < 1$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

(β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $1, x, x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

26. (α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

(β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

27. (α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 4$.

(β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$$

28. (α) Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$.

(β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

1 (2-34157). Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$,

(α) να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$,

(β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

2 (2-12943). Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

(α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

3 (2-15051). (α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το $(2 + \sqrt{5})^2$.

(β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.

4 (2-14774). (α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

(β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

5 (2-14849). (α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

6 (2-14452). Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

(α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

(β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

7 (2-37198). Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

8 (2-37197). Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β) Για $x = -3$ να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

9 (2-34152). Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

(γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

10 (2-14599). Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

11 (2-37194). (α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.

12 (2-14682). Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$

(α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

13 (2-37199). Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

(α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

(β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$.

14 (2-37172). Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

(α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

15 (2-34155). Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

(α) Να δείξετε ότι: $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

16 (2-36778). Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

(α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

17 (2-37192). Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41 \quad \sqrt{3} \cong 1,73 \quad \sqrt{5} \cong 2,24 \quad \sqrt{7} \cong 2,64$$

(α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$.

3 Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού

1 (2-14649). Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι

$$K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1, \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1. \end{cases}$$

(β) Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$. Στην συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

2 (2-13169). Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

(α) να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$,

(β) να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

3 (2-35033). Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, με x πραγματικό αριθμό.

(α) Να αποδείξετε ότι αν $2 \leq x < 3$, τότε $A + B = x - 1$.

(β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4 (2-34872). Δίνεται η εξίσωση $\kappa x + 3 = 2x$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

(α) Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa = 1$ και για $\kappa = 3$.

(β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa = 2$.

5 (2-14224). Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2-1}{x^2-x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

(α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

(β) (i) Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(ii) Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6 (2-34163). Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7 (2-36896). Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

(γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

8 (2-12857). Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

(α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

(γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

9 (2-34146). Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις: (i) $\alpha = 1$, (ii) $\alpha = -3$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

10 (2-12917). Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha - 1| - 3)x = \alpha + 2$ (1), με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\alpha = 0$ και $\alpha = 5$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha - 1| = 3$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (β).

11 (4-36673). Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

(α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

(β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε:

(i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

3.2 Η Εξίσωση $x^v = \alpha$

1 (3-14052). (α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + x = 0$.

(γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$.

2 (4-14820). (α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

(i) $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$,

(ii) $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

(i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση .

(ii) Με τη βοήθεια του (β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

1 (2-34161). (α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος, τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

2 (2-37181). Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

(β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

3 (2-13028). Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2\alpha - 2 = 0$ (1), με $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

(β) Για $\alpha = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

4 (2-35382). Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}.$$

(α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

5 (2-35100). (α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0.$$

6 (2-37178). Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα.

(α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

7 (2-34149). (α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

(β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| < 2$ (2).

(γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

* * *

8 (2-36890). (α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

(β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος.

9 (2-34436). Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}.$$

(α) Να δείξετε ότι:

$$A + B = \frac{1}{2}, \quad A \cdot B = \frac{1}{20}.$$

(β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

10 (2-34154). Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}, \quad B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}.$$

(α) Να δείξετε ότι $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

(β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A , B .

11 (2-34920). Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2 + x - 1$ (1).

(α) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$x_1 + x_2, \quad x_1 \cdot x_2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

(β) Αν $\frac{1}{x_1} = -1$ και $\frac{1}{x_2} = 2$, να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

12 (2-37171). Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -15$.

(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

13 (2-35038). Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β , και να τους βρείτε.

14 (2-34150). Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

(α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64$$

(β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

* * *

15 (4-36663). Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d + 1)$ cm

(α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

(i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

(ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

16 (4-36661). Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

(β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

(γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

17 (4-36675). Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

(i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

(ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

- (i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,
- (ii) να βρείτε το λ .

18 (4-34327). (α) Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 - 3x - 4 = 0. \quad (1)$$

(β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

- (i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).
- (ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

19 (4-34310). Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

- (α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.
- (β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ .
- (γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

20 (4-34544). Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1), \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- (α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.
- (β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .
- (γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

21 (4-33826). (α) Δίνεται η εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \quad (1)$$

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε

- (i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$,
- (ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

22 (2-37169). Δίνεται το τριώνυμο: $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$.
- (β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

4 Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού

1 (2-36888). (α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 \leq x + 9$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

(γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

2 (2-13025). (α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$.

(γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

3 (2-36886). (α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$.

(γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

4 (2-36893). (α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 1| \leq 7$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| > 2$.

(γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

5 (2-34148). (α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

(i) $|2x - 3| \leq 5$,

(ii) $|2x - 3| \geq 1$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

6 (2-37191). (α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

(i) $|1 - 2x| < 5$,

(ii) $|1 - 2x| \geq 1$.

(β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

7 (2-36777). Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

8 (2-36895). (α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$.

(γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

9 (2-37170). Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}C$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \quad \text{όταν } 0 \leq x \leq 200.$$

- (α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.
(β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290^{\circ}C$.
(γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440° ;

10 (3-35296). (α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

(β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

11 (3-14753). Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τούς οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).

(α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

(β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παράσταση $A = |2x - 3| - |4 - 3x|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

* * *

12 (2-37193). Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

13 (2-37195). Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β) Αν $x = 5$, να αποδείξετε ότι $A^2 + A - 6 = 0$.

14 (2-37196). Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x-4}$.

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

* * *

15 (4-14650). (α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| \leq 5$.

(β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$.

(γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x - 3| \leq 5$$

(δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$||x| - 3| \leq 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16 (4-34325). Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

(γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

17 (4-33896). Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$|\alpha - 2| < 1 \quad \text{και} \quad |\beta - 3| \leq 2$$

(α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$.

(β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

(γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

(δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

18 (4-33893). (α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

(β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

(i) Να δείξετε ότι $3x - 4 > 0$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(iii) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

1 (2-37182). (α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

(β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2 (2-37168). Δίνονται οι ανισώσεις:

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 - 16 \leq 0 \quad (2).$$

(α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

3 (2-14189). (α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

(β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος (α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

4 (2-35035). Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του (α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 (2-12722). Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$.

(α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

(β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$.

6 (2-12976). (α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

7 (2-13321). (α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$ (1).

(β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$ (2).

(γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

8 (2-35030). (α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|.$$

9 (2-34162). (α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.

(β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

10 (2-36892). (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|x|}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3}.$$

(β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

(γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11 (2-36887). Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

(α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

(γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

12 (2-34919). (α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1).

(β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x - 3| + |x - 7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

13 (3-34910). (α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).

(β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης (1).

14 (3-14601). Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

(α) Να δείξετε ότι $0 < x < 1$.

(β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς $1, x, x^2$.

15 (4-36670). Δίνονται οι ανισώσεις $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

(α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

(γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

16 (4-36669). Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

(α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.

(γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

17 (4-36678). (α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

(i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος (α).

(ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

18 (4-33712). Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(β) (i) Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

(ii) Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$;

(γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

19 (4-14653). Δίνεται η ανίσωση $|x - 1| \leq 3$ (1).

(α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιο του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

20 (4-34323). Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

(γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

(i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2$.

(ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), f(x_2+1).$$

21 (4-34319). Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 22** (4-14615). Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση.
- Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.
- (γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.
- (δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$.
- 23** (4-33890). (α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1).
- (β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$
- (i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ, λ .
- (ii) Να δείξετε ότι $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.
- 24** (4-33855). (α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
- (ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.
- (β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.
- (i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$
- 25** (4-33711). Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$.
- (α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .
- (β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- (γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- 26** (4-33587). Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.
- (α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
- (β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.
- (γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

5 Πρόοδοι

5.2 Αριθμητική Πρόοδος

1 (2-35143). Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0, \alpha_4 = 4$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4, n \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

2 (2-35046). Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

(α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

3 (2-34145). Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

(α) Να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2.$$

(β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

4 (2-14656). Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

(α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

(β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$.

5 (2-14574). Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.

(α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

6 (2-35408). Οι αριθμοί $A = 1, B = x + 4, \Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

(α) Να βρείτε τη τιμή του x .

(β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

(i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω ,

(ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

7 (2-34871). (α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x + 2, x + 1, 3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου

8 (2-34877). (α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).

(β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

- 9** (2-36897). (α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραιών $1, 2, 3, \dots, n$.
 (β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.
- 10** (2-35375). Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.
 (α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.
 (β) Να βρείτε τον α_{20} .
 (γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.
- 11** (2-34153). Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .
 (α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.
 (β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.
- 12** (2-34158). Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.
 (α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.
 (β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (α_n) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).
- 13** (2-34147). Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.
 (α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.
 (β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- 14** (2-35299). Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.
 (α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.
 (β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
 (γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;
- 15** (2-14597). Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.
 (α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήστε τον συλλογισμό σας.
 (β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.
 (γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

5.3 Γεωμετρική Πρόοδος

1 (2-36891). Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με θετικό λόγο λ , για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

(α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(β) Να δείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_n = 2^{n-3}$.

2 (2-35205). (α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x, 2x + 1, 5x + 4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν: (i) $x = 1$, (ii) $x = -1$.

3 (2-12787). (α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

4 (2-34874). (α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

(β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

5 (2-35042). (α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4, 2 - x, 6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

(i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

6 (2-12763). Δίνεται μία πρόοδος α_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$.

(α) Να εξετάσετε αν η α_n είναι αριθμητική πρόοδος.

(β) Να αποδείξετε ότι η α_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

7 (2-14920). Μια γεωμετρική πρόοδος (α_n) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

(α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

(γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

8 (2-34156). Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

(α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

(β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

9 (3-35411). (α) Αν οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(β) Αν οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

10 (3-35037). Οι αριθμοί $\kappa - 2, 2\kappa$ και $7\kappa + 4, \kappa \in \mathbb{N}$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

(α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

(β) (i) Να εκφράσετε τον 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 .

(ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

11 (4-33891). Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν: $\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

(α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

(β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}, n = 1, 2, 3, \dots$, είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .

(γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_n) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_n) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

12 (4-34180). Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8, x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(β) Να βρείτε τον αριθμό x , ώστε οι $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \dots$ και (β_n) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \dots$, τότε να βρείτε:

(i) Το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) .

(ii) Την τιμή του n , ώστε για το άθροισμα S_n του ερωτήματος (i) να ισχύει:
 $2 \cdot (S_n + 24) = \beta_7$.

13 (4-34181). Δίνεται ορθογώνιο μήκους α , πλάτους β και εμβαδού E . Οι αριθμοί α, E, β , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .

(β) Αν $E = 1$ και $\alpha + \beta = 10$,

(i) να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β .

(ii) να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

6 Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

1 (2-14781). Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \mapsto y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

- (α) (i) Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \mapsto y$ είναι συνάρτηση.
(ii) Είναι η αντιστοίχιση $y \mapsto x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \mapsto y$.

2 (2-13031). Δίνεται η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

- (α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2, x = 0, x = -\frac{1}{2}$.
(β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .
(γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3 .

3 (2-37189). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

- (α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(\frac{1}{2}) + f(1) - f(2)$.
(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

4 (2-35405). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
(β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$.

5 (2-37202). (α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

- (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.
(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$

6 (2-37185). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3-16x}{x-4}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$.
(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

7 (2-12765). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

8 (2-13032). Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x+5}$.

(α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

(β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

(γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$.

9 (2-35298). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0, \\ x-1, & x \geq 0. \end{cases}$

(α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$

(β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$

10 (2-37175). Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x & \text{αν } x < 0, \\ 2x+5 & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$

(α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

11 (2-14681). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 0, \\ 2x+2, & x \geq 0. \end{cases}$

(α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

12 (2-14728). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0, \\ x^2+1, & x \geq 0. \end{cases}$

(α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

13 (2-13026). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος,} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός.} \end{cases}$

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\frac{1}{2})$.

(β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

14 (2-34446). Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$.

(α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

15 (4-36680). Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

(β) Για $\alpha = 1$,

(i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

(ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

16 (4-14562). Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(β) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$.

(γ) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

17 (4-36679). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.

(γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

18 (4-34317). Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12 & \text{αν } 0 \leq x \leq 30, \\ 0,7x + 6 & \text{αν } x > 30. \end{cases}$$

(α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

(i) έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

(ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

(iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(β) Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \quad \text{για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

1 (2-36885). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.
- (γ) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.
- (δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

2 (2-35413). Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- (β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M(\alpha, \frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

3 (2-12686). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x - 1}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- (γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

4 (2-36889). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$.
- (β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

5 (2-34159). Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
- (γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

6 (2-14628). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.
- (β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .
- (γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

7 (2-14603). Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3, \\ x^2, & 3 < x < 10. \end{cases}$

- (α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.
- (β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- (γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

8 (2-14596). Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ με $x \neq -1$.

- (α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.
- (β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

9 (2-14072). Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
- (β) Ανήκει το σημείο $M(1, 3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;
- (γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

10 (2-12913). (α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}.$$

- (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .
- (ii) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.
- (iii) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

11 (2-13322). Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x - 1}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- (β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$.
- (γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

12 (2-12680). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
- (γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1, -2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

13 (3-14752). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
- (γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες, xx' , yy' .

14 (4-37206). Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.
- (β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

- (i) Αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.
- (ii) Αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

15 (4-36676). Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3, \alpha \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .
- (β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:
 - (i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.
 - (ii) Για $\alpha = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha = 3, \alpha = -2, \alpha = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

16 (4-36684). Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4, x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- (β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .
- (γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha, \alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

17 (4-36681). Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.
- (β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- (γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.
- (δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

18 (4-12788). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2, x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.
- (β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.
- (γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

1 (2-37183). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

(β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

2 (2-35201). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

(α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

(β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3 (2-14575). Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

(γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

4 (2-13471). Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

5 (2-13400). Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

(α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

6 (2-13318). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$.

(β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

7 (2-13054). Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

(i) Τις εξισώσεις των ευθειών.

(ii) Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

8 (2-13178). Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.

(β) Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .

(i) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O .

9 (2-13033). Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}x + 4$.

(α) (i) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) .

(ii) Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;

(β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε) .

(γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε) .

10 (2-12939). Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

11 (2-12630). Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

(α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

(γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

12 (2-12730). Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$. Δίνεται ότι $\varepsilon_{\varphi 45^\circ} = 1$.

(β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ , αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

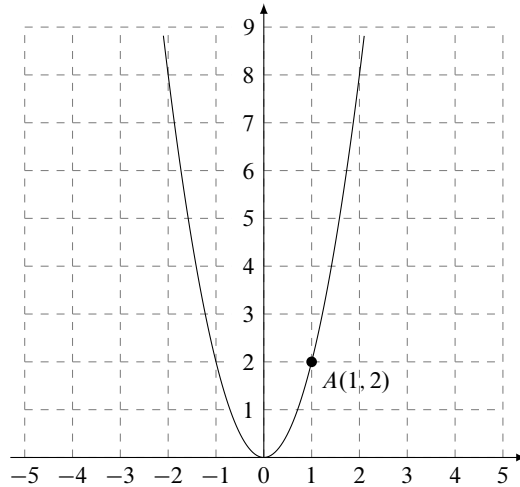
13 (2-12856). Δίνεται ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + 5$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

(α) (i) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε .

(ii) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

14 (4-12942). Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο α .



- (α) Αν το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha = 2$.
- (β) (i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1, 6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.
- (ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.
- (γ) (i) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.
- (ii) Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

15 (4-36652). Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- (α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
- (β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
- (δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιιάξονα Ox .

16 (4-33895). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
- (γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.
- (δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

A Το 1ο Θέμα

A.1 Θεωρία

1. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Απόδειξη. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί, μπορούμε να τα υψώσουμε στο τετράγωνο. Οπότε, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| &\iff |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \\ &\iff |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \\ &\iff (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \quad \text{που ισχύει.} \quad \square \end{aligned}$$

2. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Απόδειξη. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί, μπορούμε να τα υψώσουμε στο τετράγωνο. Οπότε, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\iff |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\ &\iff (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \\ &\iff \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2 \\ &\iff \alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \quad \text{που ισχύει.} \quad \square \end{aligned}$$

3. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}.$$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} S = x_1 + x_2 &= \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ &= \frac{-\beta - \sqrt{\Delta} - \beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ &= \frac{-2\beta}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 P = x_1 \cdot x_2 &= \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\
 &= \frac{(-\beta - \sqrt{\Delta}) \cdot (-\beta + \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} \\
 &= \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} \\
 &= \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad \square
 \end{aligned}$$

5. Έστω ότι x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του α .

Απόδειξη. Επειδή το τριώνυμο $f(x)$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 , ισχύει ότι

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2). \quad (1)$$

Περίπτωση 1: $x < x_1$. Από υπόθεση, $x_1 < x_2$, άρα $x < x_1 < x_2$, οπότε έχουμε

- $x < x_1 \implies x - x_1 < 0$,
- $x < x_2 \implies x - x_2 < 0$.

Άρα $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α .

Περίπτωση 2: $x > x_2$. Από υπόθεση, $x_1 < x_2$, άρα $x_1 < x_2 < x$, οπότε έχουμε

- $x_1 < x \implies x - x_1 > 0$,
- $x_2 < x \implies x - x_2 > 0$.

Άρα $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α . $\square$

6. Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \alpha_1 \\
 \alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \\
 \alpha_3 &= \alpha_2 + \omega \\
 \alpha_4 &= \alpha_3 + \omega \\
 &\vdots \\
 \alpha_{n-1} &= \alpha_{n-2} + \omega \\
 \alpha_n &= \alpha_{n-1} + \omega.
 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της n αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$. $\square$

7. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α , β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Απόδειξη. Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α , β , γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω , τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \quad \text{και} \quad \gamma - \beta = \omega.$$

Επομένως

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \implies 2\beta = \alpha + \gamma \implies \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Αντίστροφα, αν για τρεις αριθμούς α , β , γ ισχύει

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

τότε

$$2\beta = \alpha + \gamma \implies \beta + \beta = \alpha + \gamma \implies \beta - \alpha = \gamma - \beta,$$

που σημαίνει ότι οι α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. □

A.2 Σωστό ή Λάθος;

1. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.
2. Αν είναι $\alpha\beta > 1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha > 1$ και $\beta > 1$.
3. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α , β , γ , δ ισχύει η πρόταση: Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.
4. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α , β , γ , δ .
5. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύει ότι $|\alpha + \beta| \leq |-\alpha| + |\beta|$.
6. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε $x = 3$ ή $x = -3$.
7. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|\alpha| = \alpha$.
8. Ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
9. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \iff -\rho < x < \rho$.
10. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύει ότι $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$.
11. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \iff -\theta < x < \theta$.
12. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α , $\beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
13. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$.
14. Η εξίσωση $\alpha x = \alpha$ έχει μοναδική λύση $x = 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
15. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x , όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.
16. Η εξίσωση $x^3 = -8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.
17. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$.
18. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.
19. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με ν περιττό φυσικό και $\alpha < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

20. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$.
21. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ με $\alpha < 0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.
22. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.
23. Αν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
24. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.
25. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .
26. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.
27. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω . Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων διαδοχικών όρων της (α_ν) δίνεται από την σχέση

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[\alpha_1 + (\nu - 1)\omega].$$

28. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
29. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο $\lambda = 1$, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$.
30. Το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.
31. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, 5)$ ισχύει $f(5) = 3$.
32. Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
33. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

34. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.
35. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.
36. Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.
37. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.

A.3 Θέματα τράπεζας

- 1** (1-14731). (α) Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
1. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
 2. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha + \beta| \leq |-\alpha| + |\beta|$.
 3. Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.
 4. Η εξίσωση $x^3 = -8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.
 5. Αν είναι $\alpha\beta > 1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha > 1$ και $\beta > 1$.
- (β) Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$.
- 2** (1-14932). (α) Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
1. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$.
 2. Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$.
 3. Αν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 4. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε $x = 3$ ή $x = -3$.
 5. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.
- (β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.
- 3** (1-14811). (α) Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
1. Το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.
 2. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
 3. Ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
 4. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
 5. Η εξίσωση $\alpha x = \alpha$ έχει μοναδική λύση $x = 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.
- 4** (1-14829). (α) Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
1. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

2. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|- \alpha| = \alpha$.
 3. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.
 4. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.
 5. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.
- (β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α , β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.
- 5** (1-14935). (α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
1. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
 2. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \iff -\rho < x < \rho$.
 3. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με ν περιττό φυσικό και $\alpha < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[\nu]{|\alpha|}$.
 4. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, 5)$ ισχύει $f(5) = 3$.
 5. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- (β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.
- 6** (1-14782). (α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
1. Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
 2. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ με $\alpha < 0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.
 3. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$.
 4. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματιστικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.
 5. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο $\lambda = 1$, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$.
- (β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.
- 7** (1-14801). (α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.
1. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση: Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.
 2. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \iff -\theta < x < \theta$.

3. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.
4. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .
5. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

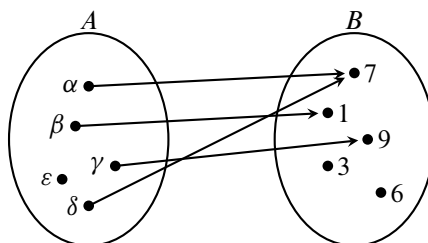
(β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

8 (1-14813). (α) Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

1. Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$.
2. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.
3. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_n) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω . Το άθροισμα S_n των n πρώτων διαδοχικών όρων της (α_n) δίνεται από την σχέση

$$S_n = \frac{n}{2}[\alpha_1 + (n-1)\omega].$$

4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x , όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.
5. Στο παραπάνω σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου A σε στοιχεία ενός συνόλου B . Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;



- (Α) η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .
 - (Β) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του A .
 - (Γ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου A αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου B , το 7.
 - (Δ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ϵ δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του B .
- (β) Έστω ότι x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του α .

B Προβλήματα

1 (4-36662). Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

- (α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.
- (β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.
- (γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

2 (4-36660). Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

- (α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;
- (β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;
- (γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.
 - (i) Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;
 - (ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

3 (4-37205). Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξάπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

- (α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά από το ατύχημα.
- (β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;
- (γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

4 (4-36654). Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δι-

νονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

- (α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- (β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;
- (γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).
- (δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 (4-36659). Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

- (α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;
- (β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.
 - (i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$.
 - (ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
- (γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.